ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 14 Februar 1934 Heft 1

Inhalt:

Der bisherige Herausgeber dieser Zeitschrift, Prof. Dr. R. von Mises, hat einen Ruf nach Istanbul angenommen und deshalb die Leitung dieser Zeitschrift niedergelegt. Auf seinen Vorschlag hin habe ich nach Vereinbarung mit dem Verlage die Schriftleitung übernommen.

Ich betrachte es als meine vornehmste Pflicht, an erster Stelle der großen Verdienste rühmend zu gedenken, die Herr Prof. von Mises sich — weitsichtig unterstützt durch den Verlag des Vereins deutscher Ingenieure — um die Gründung und die Entwicklung dieser Zeitschrift erworben hat. Ich werde mich bemühen, die Zeitschrift auf der bisherigen Höhe zu halten und bitte hierzu um die Unterstützung aller Fachgenossen.

Dresden, 1. Januar 1934. *E. Trefftz.*

HAUPTAUFSÄTZE

Über ein allgemeines Elastizitätsgesetz spröder Körper*).

Von *H. Schlechtweg* in Göttingen (jetzt: Essen).

Unter spröde sollen hier Materialien verstanden sein, wie Gußeisen, Sandstein und andere Steine, wenn sie bei den in der Materialprüfung üblichen Geschwindigkeiten etwa durch Zugspannungen beansprucht werden. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, ein Gesetz anzugeben, das das jungfräuliche mechanische Verhalten solcher Körper für möglichst allgemeine Spannungszustände zu beschreiben gestattet.

In dem einleitenden Abschnitt über die Frage der Begriffsbildung wird unterschieden zwischen dem im Hookeschen Sinn elastischen Körper, dem plastischen und dem spröden Körper und die charakteristischen Eigenschaften eines jeden aufgewiesen. Der sich hieran anschließende I. Teil der Untersuchung beschäftigt sich mit der Auffindung eines nicht linearen Elastizitätsgesetzes für spröde Körper. In der Hauptsache werden ein Zugversuch und ein Druckversuch an Sandstein dazu benutzt, um zu dem angestrebten Gesetz zu kommen.

*) Herrn Prof. Prandtl, der mir diese Untersuchung in seinem Institut f. angew. Mechanik durchzuführen erlaubte, möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank sagen, sowie der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, die mir meinen Göttinger Aufenthalt ermöglichte.

Soll nun ein Gesetz, bei dem die in es eingehenden Stoffziffern an den speziellen Fällen des Zug- und Druckversuchs bestimmt sind, auch gleichzeitig gelten können für allgemeinere Spannungszustände, und soll es seine Form nicht ändern gegenüber affinen Koordinatentransformationen, was ja für ein Gesetz der Physik zu verlangen ist, so muß es formuliert werden unter Benutzung der Tensoralgebra; die in dem Gesetz auftretenden skalaren Funktionen müssen demnach Invarianten sein. Natürlich steht damit noch keineswegs fest, daß das so koordinatenunabhängig formulierte Gesetz auch sich wirklich als in der Natur erfüllt erweisen müßte; die Entscheidung hierüber steht einzig und allein dem Versuch zu, was in dem II. Teil der Untersuchung behandelt wird. Es wird dann in Abschnitt 1 zur Erweiterung des Hookeschen Gesetzes die mit einer gewissen Stoffkonstanten C multiplizierte Wurzel aus der quadratischen Invarianten des Deviators des Spannungstensors eingeführt; es zeigt sich, daß dieser Ansatz geeignet ist, den Zugversuch zu beschreiben, daß er aber noch unvollständig ist, da der Druckversuch nicht mit ihm erfaßt werden kann. In Abschnitt 2 leiten Versuche über die Kombination von Druck und Umschlingung darauf hin, daß noch die mit einer weiteren Stoffziffer B multiplizierte lineare Invariante des Spannungstensors hinzugenommen werden muß; hiermit lassen sich der Zugversuch und der Anfang des Druckversuchs darstellen. Das Ziel von Abschnitt 3 ist es, durch Hinzufügung einer letzten mit einer Konstanten L multiplizierten Invarianten auch den Druckversuch vollständig zu beschreiben; die Form der hierzu nötigen Invarianten ergibt sich durch ein etwas genaueres Studium von aus Druck und Umschlingung kombinierten Versuchen. Hiermit ergibt sich dann die endgültige Form des Gesetzes.

Der II. Teil der Untersuchung befaßt sich mit der experimentellen Prüfung des neuen Gesetzes.

Der in der vorliegenden Untersuchung nur mitgeteilte Teil der Prüfung des Gesetzes betrifft solche Spannungszustände, bei denen das mit L multiplizierte Glied vernachlässigt werden kann; es ergibt sich, daß dies z. B. der Fall ist bei dem Zugversuch, dem Torsionsversuch und bei aus Zug und Torsion kombinierten Versuchen. Diese Prüfung fällt im positiven Sinn aus. Es läßt sich ferner auch zeigen, daß das mit L multiplizierte Glied das spröde Verhalten befriedigend wiedergibt. —

In Abschnitt 1 des II. Teiles werden die speziellen Fälle des allgemeinen Gesetzes für Zug, Torsion und für die Kombination von Zug und Torsion formuliert sowie eine einfache graphische Methode der Bestimmung der Stoffziffern angegeben. Der Abschnitt 2 bringt dann Versuchsergebnisse.

Begriffsbildung. Unter Elastizität versteht man seit Hooke im speziellen den Fall, daß die Spannungen linear von den Deformationen abhängen. Wichtig ist dabei prinzipiell, daß der Deformationszustand eindeutig durch den Spannungszustand bestimmt ist und umgekehrt. Ein Beispiel für diesen Fall bildet bei kleinen Dehnungen der Flußstahl.

Dehnt man nun den Flußstahl bei dem Zugversuch stark genug, so beginnt er plastisch zu fließen. Allgemein bezeichnet man bei einem beliebigen Versuch als plastisches Gebiet ein solches, bei dem der Zusammenhang zwischen Spannungszustand und Verformungszustand kein eindeutiger ist, in dem Sinn, daß wohl zu einem bestimmten Verformungszustand ein eindeutig bestimmter Spannungszustand gehört, jedoch zu einem bestimmten Spannungszustand kein eindeutig angebbarer Verformungszustand.

Es sei in diesem Zusammenhang nur kurz hingewiesen auf die Ansätze von v. Mises[1]) einerseits und Prandtl-Reuß[2]) andererseits sowie das von Schmidt[3]) angegebene Verfestigungsgesetz. Man kann auch die Erscheinung der Plastizität von dem anschaulichen Standpunkt aus betrachten, der auf Mohr zurückgeht und später von Prandtl[2]) weiter ausgebaut wurde; hiernach ist das Eintreten eines Probestabes in den plastischen Zustand dadurch gekennzeichnet, daß Gleitebenen[4a]) sich ausbilden (vgl. z. B. die schönen Aufnahmen von Nádai[4])).

Eine ganz andere Möglichkeit des mechanischen Verhaltens ist das spröder Stoffe[5]), wie Gußeisen und Steine. Beim Zugversuch wird ihr jungfräuliches Verhalten durch die Kurve OA in Abb. 1 gegeben. Es handelt sich hier um einen Fall, der zwischen dem Hookeschen Gesetz steht und dem plastischen Verhalten. Man könnte leicht versucht

[1]) v. Mises: Gött. Nachr. Math.-phys. Kl. 1913, S. 582.

[2]) Prandtl: Verh. d. 1. int. K. f. techn. Mech., Delft, 1924, S. 45. — Reuß: Z. f. angew. Math. u. Mech. **10**, 1930, S. 267.

[3]) Schmidt: Ing.-Arch. **3**, 1932 (zur Kritik dieser Arbeit vgl. H. Schlechtweg: Metallwirtschaft demnächst).

[4]) Nádai: Der bildsame Zustand der Werkstoffe, Berlin 1927.

[4a]) Zusatz bei der Korrektur: Über die Physik des plastischen Gleitungssprunges (vgl. H. Schlechtweg: Phys. Z. **34**, 1933, S. 404).

[5]) In bezug auf diese Art der Klassifikation vgl. auch Schlechtweg: Z. f. Phys., **72**, 1931, 811.

sein, dieses Verhalten als eine plastische Verfestigung zu bezeichnen; wir werden jedoch sehen, daß hier bei spröden Körpern ein anderes Gesetz gilt; ferner sind bei sprödem Verhalten keine Vorgänge im Gefüge (Gleitebenen) zu beobachten im Gegensatz zu den auf Verfestigung beruhenden Vorgängen; wenn bei einem Stoff in dem Gebiet des spröden Verhaltens eine Gleitflächenbildung überhaupt vorhanden sein sollte, so ist sie eine submikroskopisch feine und bildet somit das extreme Gegenstück zu dem Fall der Verfestigung, in dem Gleitebenen makroskopisch oder mikroskopisch nachweisbar sind. Auf Übergänge von einer Verhaltungsweise in die andere ist an anderer Stelle[6]) eingegangen. Im folgenden werde das Verhalten spröder Körper als *nichtlinear elastisch* bezeichnet unter geeigneter *Verallgemeinerung des Begriffes Elastizität*, wozu besonderer Grund vorliegt, wie jetzt veranschaulicht werden soll.

Wir betrachten die drei Fälle der Hookeschen Elastizität, der Flußeisen-Plastizität und des spröden Verhaltens von Gußeisen nebeneinander. Es sei bis zu einem bestimmten Punkt belastet, und nun werde eine *Entlastung* mit nachfolgender Wiederbelastung vorgenommen. Man erhält dann bei Gußeisen eine Hysteresisschleife[7]) nach Abb. 1; bei Flußeisen besteht der Weg (Abb. 2) entweder aus dem Geradenstück BCA oder einer Schleife, wenn man bis zur Druckfließgrenze geht.

Abb. 1. Zugversuch an Gußeisen.

Abb. 2. Zugversuch an Flußeisen.

Bei Gußeisen ist im Gegensatz zu Flußstahl der Verformungszustand auch im Gebiet der Hysteresis eindeutig festgelegt, wenn der zurückgelegte Spannungs*weg* vorgeschrieben ist; denn gibt man bei Gußeisen den Punkt A, von dem aus entlastet werden soll, so ist damit die Kurve ACB eindeutig festgelegt; entsprechendes gilt für erneute Belastung von B aus. Nunmehr kann man Elastizität und die einer Verfestigung im allgemeinen vorangehende Plastizität von dem in dieser Untersuchung nur betrachteten formalen Standpunkt (über die metallographische Grundlage vgl. die spätere Fußnote 9) folgendermaßen *definieren*:

Elastizität: Zu gegebenem Spannungsweg gehört eindeutig ein Verformungsweg.

Plastizität: Zu gegebenem Spannungsweg kann nicht eindeutig ein Verformungsweg angegeben werden, während zu gegebenem Verformungsweg ein eindeutig bestimmter Spannungsweg gehört.

Hieraus ergeben sich folgende *Konsequenzen*: Das Verhalten des Gußeisens ist elastisch; im Gegensatz zu der Hookeschen Elastizität ist die Elastizität spröder Stoffe eine nicht-lineare; die Hysterese des Gußeisens ist eine *elastische Hysterese*. — Analog: Das Verhalten des Flußstahls ist plastisch, wenn man mit der Dehnung hoch genug geht; die in Abb. 2 dargestellte Hysterese des Flußeisens ist eine *plastische Hysterese*. Dagegen bekommt man auch bei Flußeisen nur eine elastische Hysterese, wenn von A aus entlastet wird in das elastische Gebiet hinein und nicht bis zur Druckfließgrenze.

Vielfach wird als plastisch ein Körper definiert, bei dem die Formänderungsarbeit ganz oder zum Teil irreversibel[8]) aufgenommen wird. Diese Definition umfaßt im Gegensatz zu der hier vorgeschlagenen sowohl den Fall des Gußeisens als auch den des Flußeisens. Eine solche Definition kann nicht als ausreichend angesehen werden, da sie zwei verschiedene Arten des mechanischen Verhaltens als gleich betrachtet, die man wegen der oben erwähnten Vorgänge im Gefüge nicht als gleich betrachten kann; denn man kann sie nur als gleich betrachten, wenn sie u. a. auch durch denselben mathematischen Formalismus erfaßt werden können; das letztere ist jedoch nicht möglich.

Spröde Körper sind inhomogene Körper, wobei man, um Kontinuitätsmechanik zu treiben, natürlich voraussetzen muß, daß die Korngröße klein sei gegenüber den Abmessungen des betrachteten Körpers. Man erhält beim Zugversuch die Spannung σ üblicherweise so, daß die aufgebrachte Zugkraft dividiert wird durch den Querschnitt, der sich während des Versuchs praktisch nicht ändert. *Man tut also so, als ob man in einem inhomogenen Körper einen homogenen Spannungszustand hätte*; dies ist natürlich in Wirklichkeit nicht der Fall. Denken wir etwa, indem wir idealisieren, an ein Gußeisen, welches aus einem homogenen Gefüge bestehe, das nur mit Graphitader durchsetzt sei, so wirken diese als Kerben. In den zwischen diesen Adern liegenden Stoffbrücken werden natürlich keineswegs beim Zugversuch nur reine Zugbean-

[6]) Vgl. H. Schlechtweg: Ing.-Arch. 4, 1933, 203.
[7]) Vgl. Berliner: Ann. d. Phys. (4), 20, 1906, S. 527.
[8]) Vgl. z. B. Lehr, ZVDI, 1931, S. 1408.

spruchungen, sondern auch Biegungen, Verdrehungen, Knickungen und vieles andere eintreten. Wenn jedoch eine sehr große Anzahl von Graphitadern vorhanden ist und auch das Grundgefüge, in das sie eingebettet sind, in feinerer Weise unterteilt ist zu einem inhomogenen Gemenge, so kann man so vorgehen, daß man von den im einzelnen tatsächlich eintretenden Vorgängen abstrahiert, und sich ein Modell denkt, indem man einfach so tut, als ob ein homogener Zugbeanspruchungszustand in dem Stab sei: was man hiermit erfaßt, ist also nur ein gewisses statistisches Mittel. Zur Veranschaulichung dienen Abb. 3 und 4, die das

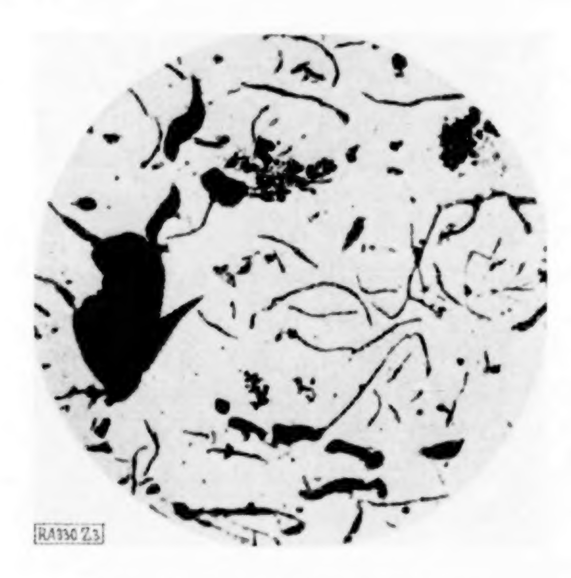




Abb. 3. Graphit im Gußeisen.



Abb. 4. Gefüge von Gußeisen.

Gefügebild eines Gußeisens[9]) wiedergeben. Abb. 3 zeigt einen polierten Schliff in 100facher Vergrößerung; man erkennt dünne Graphitadern und größere Ablagerungen von Graphit auf weißem Grund; dieses Grundgefüge ist jedoch nicht eine homogene Masse, sondern ist, wie man bei Ätzung mit alkoholischer Pikrinsäure erkennt (Abb. 4; 250fache Vergrößerung), in feinerer Weise unterteilt; die weißen Flecken sind Ferrit, d. h. reines Eisen; die feine schwarz-weiße Streifung stellt ein sehr feines inhomogenes Gemenge, das Eutektoid Perlit, dar aus Ferrit und Fe_3C, dem Zementit. — Es werde nunmehr nicht die Frage untersucht, wie man sich ein physikalisches Modell für einen solchen Körper aufbauen kann, das das Wesentliche dieses Gefügeaufbaues wiedergibt und ein Dehnungsgesetz nach Abb. 1 liefert; es soll vielmehr im folgenden auf heuristischem Weg die Aufstellung eines allgemeinen Gesetzes versucht werden, das die mechanischen Vorgänge beschreibt. In ähnlicher Weise kann man auch für den Augenblick des spröden Bruches von den im einzelnen tatsächlich eintretenden Vorgängen absehen und versuchen, den Bruch zu beschreiben durch eine gewisse Invariantenbedingung[10]). Es ist dies ein ähnlicher Gedanke, wie er dem Versuch zugrunde liegt, das plastische Fließen des Stahls, das zonenweise und unstetig eintritt, durch eine stetige Funktion, nämlich durch die Misessche Fließbedingung zu beschreiben.

Vor der Behandlung des eigentlichen Themas noch ein kurzes Wort über den Elastizitätsmodul von spröden Körpern. Man nimmt zuweilen an, daß der Elastizitätsmodul gegenüber Zug und Druck verschieden sei, eine Ansicht, die sich jedoch bei näherer Betrachtung als unzutreffend erweist[11]). Auch sind in der vorhandenen Literatur dadurch oft Täuschungen über die Größe des Elastizitätsmoduls unterlaufen, daß man ihn bestimmte durch die nach Augenmaß gezogene Tangente im Nullpunkt; es wird in dem II. experimentellen Teil dieser Untersuchung eine eindeutige und scharfe Bestimmungsmethode für den Elastizitätsmodul angegeben.

I. Das heuristische Verfahren zur Auffindung des allgemeinen nicht-linearen Elastizitätsgesetzes.

1. Die Erweiterung des Hookeschen Gesetzes mit Hilfe der Invarianten $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$. Die Versuche, das jungfräuliche mechanische Verhalten spröder Stoffe durch einen rechnerischen Ausdruck zu erfassen, gehen zurück auf Bach und Grübler. Der erstere von beiden schlug für den Fall des Zugversuchs einen Ansatz vor von der Form

$$\varepsilon = A\,\sigma^m\,;$$

[9]) Zur Photographie der Schliffe hatte mir Herr Prof. Vogel, Göttingen, freundlicherweise die mikrophotographische Einrichtung des Metallographischen Instituts zur Verfügung gestellt. Eine eingehende Diskussion des Einflusses des Gefüges auf die elastischen Konstanten und die statische Festigkeit vgl. H. Schlechtweg: Arch. f. d. Eisenhüttenw. **6**, 1932/33, S. 507.

[10]) H. Schlechtweg: Ing.-Arch **4**, 1933, 263.

[11]) Vgl. H. Schlechtweg: Forschg auf d. Geb. d. Ing.-Wesens **4**, 1933, S. 119.

auf Grund des im Lauf der Zeit angesammelten Beobachtungsmaterials wird jedoch dieser Ansatz wieder abgelehnt[12]). — Einen anderen Ansatz schlug Grübler[13]) vor, indem er setzte

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{A + B\varepsilon}, \quad \text{wo } A = \frac{1}{E}.$$

Wir wollen uns jetzt mit diesem Ansatz und seiner Erweiterung auf allgemeinere Spannungszustände befassen. Grübler nahm diese Erweiterung in folgender Weise vor, wobei jetzt aus den eingangs angegebenen Gründen die tensorielle Schreibweise verwendet werden möge. Es sei $\mathfrak{P}$ der Spannungstensor, auf ein kartesisches x-y-z-System bezogen:

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

und $\mathfrak{S}$ der Deformationstensor:

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Grübler gab dann folgende Verallgemeinerung an:

$$P_{ik} = \frac{S_{ik}}{A + B\,S_{ik}}.$$

Diese Art der Erweiterung hat jedoch begrifflich manches Unbefriedigende an sich. Ganz sicher werden wenigstens für nicht allzu große Spannungen die beiden Tensoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ koaxial sein. Man würde also den Grüblerschen Ansatz, der den Zugversuch betrifft, von diesem Standpunkt aus lieber so erweitert sehen, daß im Nenner nicht S_{ik} steht, sondern eine skalare Invariante von $\mathfrak{S}$. — Um einen weiteren Mangel kennen zu lernen, sei an das Hookesche Gesetz angeknüpft, das hier in der folgenden Weise geschrieben werde; es sei die Spur des Deformationstensors bezeichnet mit

$$|\mathfrak{S}| = \sum_{i=1}^{3} S_{ii} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

und die Spur des Spannungstensors mit

$$|\mathfrak{P}| = \sum_{i=1}^{3} P_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

es sei $\mathfrak{E}$ der Einheitstensor:

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

dann ist der Deviator von $\mathfrak{S}$ dargestellt durch

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} - \frac{|\mathfrak{S}|}{3}\mathfrak{E} = \begin{vmatrix} S_{xx} - \frac{|\mathfrak{S}|}{3} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} - \frac{|\mathfrak{S}|}{3} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} - \frac{|\mathfrak{S}|}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \frac{|\mathfrak{S}|}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \frac{|\mathfrak{S}|}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \frac{|\mathfrak{S}|}{3} \end{vmatrix}$$

und entsprechend der Deviator von $\mathfrak{P}$ durch

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - \frac{|\mathfrak{P}|}{3}\mathfrak{E}.$$

[12]) Bach-Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl. 1924; auch H. Schlechtweg, Naturw. 21, 1933, S. 465.
[13]) Grübler: ZVDI, 1900, S. 1157.

Ist nun E der Elastizitätsmodul und μ der Querkontraktionskoeffizient, so lautet das Hookesche Gesetz[14]):

$$|\mathfrak{S}| = \frac{1-2\mu}{E}|\mathfrak{P}|\,; \quad \mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\mathfrak{P}'.$$

Nun hat sich bis jetzt bei allen Erweiterungen des Hookeschen Gesetzes, die sich auf Einflüsse der Zeit und das plastische Verhalten erstrecken, mit alleiniger Ausnahme technisch kaum vorkommender hoher Druckbeanspruchung[15]) gezeigt, daß die Beziehung $|\mathfrak{S}| = \frac{1-2\mu}{E}|\mathfrak{P}|$ erhalten[16]) bleibt. Es werde deshalb die Annahme gemacht, daß die Proportionalität der Spuren beider Tensoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}$ auch hier erhalten bleibt, und daß nur die Beziehung zwischen $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{P}'$ in einer der Grüblerschen Art ähnlichen Weise erweitert werden muß. Ist also J eine gewisse Invariante von $\mathfrak{P}$, so werde der Ansatz gemacht:

$$|\mathfrak{S}| = \frac{1-2\mu}{E}|\mathfrak{P}|\,; \quad \mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1-J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I});$$

denn bei dem Zugversuch ist im Fall des Grüblerschen Ansatzes:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\,\frac{\sigma}{1-B\sigma}.$$

Die Frage ist nur jetzt, wie die Invariante J aussieht. Der einfachste Fall wäre ohne Zweifel der, daß sie linear ist; die einzige lineare Invariante ist aber $|\mathfrak{P}|$. Also hieße der Ansatz:

$$\mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1-B|\mathfrak{P}|}.$$

Dieser kann jedoch noch nicht der richtige sein, da er bei Torsion auf Linearität führt. Um jedoch für den speziellen Fall des Zugversuchs im Nenner die Linearität zu erhalten, setzen wir in den Nenner die Wurzel aus einer quadratischen Invarianten; diese quadratische Invariante muß für $|\mathfrak{P}| = 0$ von 0 verschieden sein; die einfachste derartige ist

$$(\mathfrak{P}')^2 = \sum_{i=1}^{3} P_{ii}'^2 + 2\sum_{i<k} P_{ik}'^2.$$

Also werde als erster Ansatz der folgende gemacht:

$$\mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1-C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dies ergibt im Fall des Torsionsversuchs

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\tau}{1-C\sqrt{2}\cdot\tau}.$$

Für einen allgemeinen Spannungszustand ist jetzt

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \frac{|\mathfrak{S}|}{3}\mathfrak{E} = \frac{1-2\mu}{3E}|\mathfrak{P}|\,\mathfrak{E} + \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1-C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}}.$$

Wir betrachten nun den Zug- bzw. Druckversuch an einem kreiszylindrischen Stab, dessen Längsachse mit der z-Achse des Koordinatensystems zusammenfalle; senkrecht darauf seien die x- und y-Achse. Hier ist nur $P_{zz} = \sigma$ von den Komponenten von $\mathfrak{P}$ von 0 verschieden. Es wird

$$P'_{zz} = \sigma - \frac{\sigma}{3} = \frac{2}{3}\sigma\,; \quad P'_{xx} = P'_{yy} = -\frac{\sigma}{3} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{P}')^2 = \frac{2}{3}\sigma^2.$$

Dann erhält man als Darstellung des Zug- bzw. Druckversuchs

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,\frac{1-\frac{1-2\mu}{3}C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma^2}}{1-C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

[14]) Vgl. z. B. Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, Berlin 1925.
[15]) Z. B. Bridgman: Proc. Americ. Acad. of arts and sciences, 58, 1922, S. 165.
[16]) A. Föppl: Mitt. Mech.-Techn. Lab. München, 27, 1900.

In dem Fall des Zugversuchs ist $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$; im Fall des Druckversuchs ist zu beachten, daß $\sqrt{(-\sigma)^2} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$ ist.

Zur versuchsmäßigen Prüfung der Gl. (2) verwenden wir einen Zugversuch und einen Druckversuch von den sehr ausgedehnten Versuchsreihen von Bauschinger[17]), die an Material gleichen Anlieferungszustandes gemacht wurden. Abb. 5 zeigt die experimentell gewonnene Spannungs-Dehnungs-Kurve für Zug und Druck. Setzt man in Gl. (2) zugehörige ε und σ des Zugversuches ein, so wird im Mittel

$$E = 6{,}6 \cdot 10^4 \text{ kg cm}^{-2}; \quad C\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}042 \text{ kg}^{-1}\text{ cm}^2.$$

Unser Ansatz gibt dann bei diesem numerischen Beispiel mit einem Fehler von höchstens 13 % den Zugversuch richtig wieder. Die Beschreibung des Druckversuchs durch den Ansatz (1) ist jedoch unmöglich wegen der Symmetrie von $\sqrt{\sigma^2}$ in (2).

Ansatz (1) liefert für den Fall des Zug- und Druckversuches Asymptoten bei

$$\sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{C\sqrt{\frac{2}{3}}}, \quad \text{d. h. } \sigma = \pm \frac{1}{C\sqrt{\frac{2}{3}}},$$

also Schranken für den Zerreißbruch und den Druckbruch. Die genaue Lage des Bruches ist damit natürlich keineswegs gegeben. Den Asymptoten kommt somit nur eine gewisse indirekte Bedeutung zu, einen direkten physikalischen Sinn darf man ihnen keineswegs zulegen wollen; sie sind nur für das heuristische Verfahren ein brauchbares Hilfsmittel; denn eine Asymptote ist auch bereits schon in dem allgemeinen Ansatz (I) enthalten. Die Erweiterung ist jetzt in der Weise vorzunehmen, daß durch sie die Verhältnisse im Druckgebiet in Ordnung gebracht werden, während im Zuggebiet keine oder nur geringe Änderungen eintreten gegenüber dem Ansatz (1).

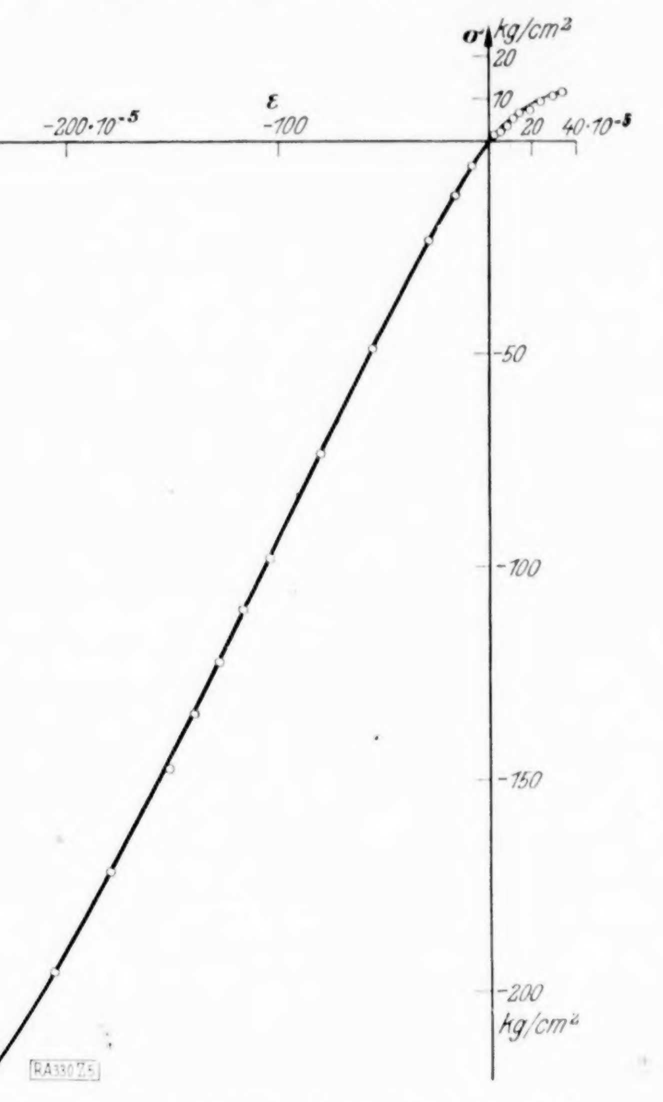


Abb. 5. Zug und Druck an Sandstein nach Bauschinger.

2. Die Einführung der Invarianten $|\mathfrak{P}|$. Einen neuen Gesichtspunkt erhält man durch die Umschlingungsversuche[18]) von v. Kármán an Sandstein und Marmor. Bei ihnen steht der Stab unter hydrostatisch erzeugtem Manteldruck σ_2 und axialem Druck σ_1. v. Kármán trägt nun die Verkürzung ε in Abhängigkeit von $\sigma_1 - \sigma_2$ auf und erhält bei Sandstein die in Abb. 6 durchgezogenen Kurven. Bei Marmor sieht die Abbildung qualitativ ähnlich aus.

Mit Erreichen eines Höchstwertes in der Spannungs-Dehnungs-Kurve tritt hier ein innerer Bruchvorgang[19]), also ein wesentlich neuer Vorgang, ein, der natürlich mit einem Ansatz von der Art, wie er hier angestrebt wird, nicht mehr erfaßbar sein kann. Wir beschränken uns deshalb von jetzt an auf den Teil der Formänderungskurven vor diesem inneren Bruchvorgang; für die folgenden heuristischen Betrachtungen werde jedoch dieser Teil der Kurven extrapoliert bis zu einer gewissen Asymptote (gestrichelt gezeichnet in Abb. 6), die sich mit wachsendem Manteldruck σ_2 zu höherem $\sigma_1 - \sigma_2$ verschiebt.

Auf Grund dieser Versuche ist es naheliegend, in den Ansatz für $\mathfrak{S}'$ noch ein Glied mit $|\mathfrak{P}|$ aufzunehmen. Der neue Ansatz laute daher:

$$|\mathfrak{S}| = \frac{1-2\mu}{E}|\mathfrak{P}|; \quad \mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1 - B|\mathfrak{P}| - C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}} \quad . \quad . \quad (3).$$

Abb. 6. Druck-Umschlingungsversuche nach v. Kármán.

[17]) Bauschinger: Mitt. d. Mech.-techn. Lab. München, **18**, 1889 (Text und Tafeln).
[18]) v. Kármán: Mitt. über Forschungsarb., **118**, 1912.
[19]) Näheres bei v. Kármán, l. c.

Für den speziellen Fall des Zug- und Druckversuchs folgt hieraus:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,\frac{1 - \frac{1-2\mu}{3}\left(B\sigma + C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma^2}\right)}{1 - B\sigma - C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Es werde nun ein Druckversuch mit einem Umschlingungsversuch kombiniert. Ist s_1 der Absolutbetrag des axialen Druckes und s_2 der des Manteldruckes, so ergibt sich für die Asymptote dieses kombinierten Versuches:

$$s_1 - s_2 = \frac{1 + 3Bs_2}{C\sqrt{\frac{2}{3}} - B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Damit $s_1 - s_2$ größer wird mit wachsendem s_2, wie es die Versuche von Kármáns verlangen, muß sein

$$C\sqrt{\frac{2}{3}} > B > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Aus dem Druckversuch berechnet sich aus den Lasten, die dem Betrage nach nicht den Betrag der Zugfestigkeit (etwa 20 bis 30 kg/cm²) sehr überschreiten[20]), zusammen mit dem Zugversuch:

$$B = 0{,}025\ \mathrm{kg^{-1}\,cm^2}\,; \quad C\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}017\ \mathrm{kg^{-1}\,cm^2}\,; \quad E = 6{,}6\cdot 10^4\ \mathrm{kg\,cm^{-2}}.$$

Die Umgleichung (6) ist also nicht erfüllt.

Der Ansatz (3) gibt also zwar den Zugversuch und bei kleinen Drucken auch den Druckversuch richtig wieder; die Asymptotenverlagerung bei dem kombinierten Druck-Umschlingungsversuch liefert er jedoch nicht.

3. Die Vervollständigung des nicht-linearen Elastizitätsgesetzes durch die Invariante $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2\,|\,\mathfrak{P}\,|}$ bzw. $\sqrt[4]{(\mathfrak{P}')^2\,|\,\mathfrak{P}\,|}$. Die beiden Stoffziffern B und C genügen, wie erkannt, noch nicht, um die tatsächlich vorliegenden Verhältnisse zu beschreiben; man muß noch eine dritte neue und, wie sich herausstellen wird, letzte, Konstante hinzunehmen.

Über die Art des Zusatzgliedes wird man informiert durch die kombinierten Druck-Umschlingungsversuche von v. Kármán. Wir wollen als Zusatzglied ein quadratisches Glied nehmen. Würde Ansatz (1) gelten, so hätte man für die Asymptote des Druck-Umschlingungsversuches:

$$1 - C\sqrt{\frac{2}{3}}(s_1 - s_2) = 0, \quad \text{d. h. } s_1 - s_2 = \frac{1}{C\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

Die Asymptote würde sich also mit wachsendem s_2 in dem $(s_1 - s_2, \varepsilon)$-Koordinatensystem nicht verlagern, im Gegensatz zu den Versuchen von v. Kármán. Dieser Verlagerung wird Rechnung getragen, wenn man eine Asymptotengleichung von folgender Form annimmt:

$$1 - C\sqrt{\frac{2}{3}}(s_1 - s_2) + f(s_2)(s_1 - s_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wo $f(s_2)$ eine gewisse Funktion von s_2 ist. Aus der letzten Gleichung folgt dann:

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{C\sqrt{\frac{2}{3}} - f(s_2)}.$$

Mit wachsendem s_2 muß wegen v. Kármáns Experimenten das hieraus berechnete $s_1 - s_2$ größer werden. Es muß also sein

$$C\sqrt{\frac{2}{3}} > f(s_2) > 0$$

und $f(s_2)$ mit wachsendem s_2 monoton wachsen. Setzt man an Stelle des Druckes s_2 eine Zugspannung, so besagt das physikalische Gefühl, daß $s_1 - s_2$ kleiner werden muß, d. h. $f(\sigma)$ muß eine sowohl für positive als auch negative σ monoton wachsende Funktion sein.

[20]) Eine einfache graphische Methode, nach der die Werte der Konstanten leicht ermittelt werden können, findet sich am Anfang des II., experimentellen Teils dieser Untersuchung.

Während also der Ansatz (1) für die Asymptote verlangt

$$1 - C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} = 0\,,$$

soll jetzt noch ein quadratisches Glied hinzugefügt werden. Es ist hierzu die Beziehung (7) tensoriell zu verallgemeinern. Eine einfache Invariante, die sich bei dem Druck-Umschlingungsversuch auf $s_1 - s_2$ reduziert, ist $\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}$. Für die monotone Funktion $f(\sigma)$ nehmen wir, indem wir uns im ganzen auf lineare und quadratische Glieder beschränken wollen, die lineare Invariante $|\mathfrak{P}|$.

Es liegt dann nahe, den folgenden allgemeineren Ansatz für die Asymptote zu versuchen:

$$1 - B|\mathfrak{P}| - C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} + L\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\,|\mathfrak{P}| = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Demgemäß kann man erwarten, daß das folgendermaßen formulierte Elastizitätsgesetz an die in der Natur vorliegenden Verhältnisse herankommt:

$$|\mathfrak{S}| = \frac{1-2\mu}{E}|\mathfrak{P}|; \quad \mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1 - B|\mathfrak{P}| - C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} + L\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\,|\mathfrak{P}|} \quad \ldots\ldots (9).$$

Nun ist für den speziellen Fall des reinen Druckversuchs

$$L\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\,|\mathfrak{P}| = L\sqrt{\frac{2}{3}}\,s^2\,.$$

Nun zeigt aber der Vergleich mit dem Versuch[21]), daß ein quadratisches Anwachsen dieses Gliedes zu stark ist, daß vielmehr anzunehmen ist, daß es nur wächst wie $s\sqrt{s}$. Es liegt deshalb nahe, in Gl. (9)

$$L\sqrt{(\mathfrak{P}')^2}\,|\mathfrak{P}| \text{ zu ersetzen durch } L\sqrt[4]{(\mathfrak{P}')^2\,|\mathfrak{P}|}\,.$$

Das allgemeine nicht-lineare Elastizitätsgesetz lautet also:

$$|\mathfrak{S}| = \frac{1-2\mu}{E}|\mathfrak{P}|; \quad \mathfrak{S}' = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{\mathfrak{P}'}{1 - B|\mathfrak{P}| - C\sqrt{(\mathfrak{P}')^2} + L\sqrt[4]{(\mathfrak{P}')^2\,|\mathfrak{P}|}} \quad \ldots (\mathrm{II})^{21a}).$$

Zur Kritik dessen, was man von diesem Gesetz erwarten darf, ist zu beachten, daß es, wie bereits schon in dem einleitenden Abschnitt über die Fragen der Begriffsbildung betont wurde, nicht entwickelt ist auf Grund irgendeiner physikalischen Modellvorstellung; es ist vielmehr so zusammengebaut, daß es den Zugversuch und den Druckversuch bei Sandstein richtig wiedergibt. Da es aber formuliert ist mit Hilfe von Invarianten, so ist man berechtigt, auch auf eine weitergehende Gültigkeit für allgemeinere Spannungszustände hoffen zu können; diese Hoffnung wäre a priori unberechtigt, wenn das Gesetz (II) nicht mit Hilfe von Invarianten formuliert wäre; gerade in diesem Punkt liegt u. a. auch die Schwäche der von Weißenberg[22]) versuchten Klassifizierung der verschiedenen Möglichkeiten des mechanischen Verhaltens als auch der von Reiner[23]) versuchten Erweiterung der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Es wird sich nunmehr bei der experimentellen Prüfung zeigen, daß tatsächlich das Gesetz (II) geeignet ist zur gleichzeitigen Beschreibung allgemeinerer Spannungszustände.

II. Die experimentelle Prüfung.

1. Das Prinzip der Auswertung der Versuche. In bezug auf die Versuchstechnik sei nur kurz bemerkt, daß bei dem hier verwendeten Gußeisen sorgfältig alle Relaxationseinflüsse ausgeschaltet werden müssen[24]). Weiterhin werde hier nur eingegangen auf die Versuche, die zur Prüfung des Teils des allgemeinen Gesetzes (II) dienten, den man für $L = 0$ erhält[25]). Während B und C von derselben Größenanordnung sind, ist L größenordnungsmäßig hundert mal kleiner als B und C. Dies bewirkt, daß im Fall des Zugversuchs und auch des Torsionsversuchs das mit L multiplizierte Glied vernachlässigt werden kann, da Zugfestigkeit und Torsionsfestigkeit so gering sind, daß dieses Glied nicht zur Wirkung gelangt.

[21]) H. Schlechtweg: Ing.-Arch. **4**, 1933, 263.

[21a]) Zusatz bei der Korrektur: Es werden die neuen Stoffziffern B, C und L in der Folge als die „Empfindlichkeiten" des Werkstoffes bezeichnet; es ist dementsprechend B die Empfindlichkeit für mittleren Zug, C die Empfindlichkeit für Schub und L die Druckempfindlichkeit (zu dieser Beziehung vgl. H. Schlechtweg: Ing.-Arch. 5, 1934, voraussichtlich Heft 1).

[22]) Weißenberg: Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1931, Nr. 2.

[23]) Reiner: Phys. Zeitschr., **33**, 1932, 499, Nr. 13.

[24]) Vgl. Berliner: Ann. d. Phys. (4), **20**, 1906, 527.

[25]) Über das mit L multiplizierte Glied, das erst bei hohen Druckspannungen praktisch von Einfluß ist, vgl H. Schlechtweg: Ing.-Arch. **4**, 1933, 263.

Zur Prüfung des Gesetzes (II) bei Vernachlässigung des Gliedes mit L wurden dann Zug- und Torsionsversuche an Gußeisenrohren vorgenommen. Theoretisch erhält man dann im Fall des Zugversuchs:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,\frac{1 - \frac{1-2\mu}{3}\left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sigma}{1 - \left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sigma}.$$

Es ist für Gußeisen $\mu = \frac{1}{4}$, bestimmt aus dem Anfang des reinen Zug- und des reinen Torsionsversuchs, wo die Formänderungskurven praktisch Geraden sind. Bei der Diskussion der Versuche sieht man, daß das Glied mit $\frac{1-2\mu}{3}\left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ so klein bleibt, daß es innerhalb der zuzulassenden Fehlergrenze von 12% weggelassen werden kann. Man kann also bei der Berechnung von ε aus σ in diesem Fall so tun, als ob Inkompressibilität vorhanden wäre.

Torsion:
$$\gamma = 2\,\frac{1+\mu}{E}\,\frac{\tau}{1 - C\sqrt{2}\cdot\tau}.$$

Kombination von Zug und Torsion so, daß stets $\tau = \alpha\,\sigma$ ist, d. h. ähnliche Veränderung des Spannungstensors:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,\frac{1}{1 - \sigma\left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3\alpha^2}\right)}; \qquad \gamma = 2\,\frac{1+\mu}{E}\,\frac{\tau}{1 - \sigma\left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1+3\alpha^2}\right)}.$$

Auch hier sind im Zähler Glieder mit $\frac{1-2\mu}{3}$ weggelassen, da sie mit den kleinen „Empfindlichkeiten" B und C multipliziert sind; sie würden einen Unterschied von derselben Größenanordnung wie beim Zugversuch liefern. Dasselbe gilt für folgende Formeln:

Torsion unter konstantem Zug σ:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,\frac{1}{1 - B\sigma - C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}; \qquad \gamma = 2\,\frac{1+\mu}{E}\,\frac{\tau}{1 - B\sigma - C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}.$$

Man sieht, daß der reine Zugversuch und der reine Torsionsversuch nötig sind, um die Konstanten $E, B + C\sqrt{\frac{2}{3}}, C$ zu bestimmen; bei den kombinierten Versuchen müssen sich dieselben Werte für E, B, C ergeben.

Es sei nun kurz angegeben, wie man graphisch aus einer experimentell gefundenen Kurve in sehr einfacher Weise den Elastizitätsmodul und die Empfindlichkeiten bestimmen kann. Im Falle des Zugversuches gilt:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E\left\{1 - \left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sigma\right\};$$

trägt man also in einem Koordinatensystem σ und $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ auf, so muß man eine gerade Linie erhalten; der Abschnitt, den diese Gerade auf der Achse $\sigma = 0$ abschneidet, gibt die Größe des E-Moduls an. Man bekommt also E hier durch Schnitt zweier Geraden im Gegensatz zu der seither üblichen und sehr schwankende Ergebnisse liefernden Methode, nach Augenmaß die Tangente an die Spannungs-Dehnungs-Kurve zu ziehen. Der Steigungsfaktor dieser Geraden hat den Wert $E\left(B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ und liefert $B + C\sqrt{\frac{2}{3}}$. — Entsprechend ist beim Torsionsversuch aufzutragen, um eine gerade Linie zu bekommen, $2(1+\mu)\frac{\tau}{\gamma}$ und τ wegen

$$2(1+\mu)\frac{\tau}{\gamma} = E(1 - C\sqrt{2}\,\tau).$$

Auch hier bekommt man durch den Abschnitt, den diese Gerade auf der Achse $\tau = 0$ abschneidet, den Betrag E; die Richtung der Geraden liefert $EC\sqrt{2}$, also C. — Bei dem kombinierten Versuch mit ähnlich veränderlichem Spannungstensor trägt man für die beiden Anteile ebenfalls $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ bzw. $2(1+\mu)\frac{\tau}{\gamma}$ als eine Koordinate auf über σ bzw. τ und erhält so Geraden; aus ihnen errechnet man

$$B + C\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1 + 3\alpha^2}.$$

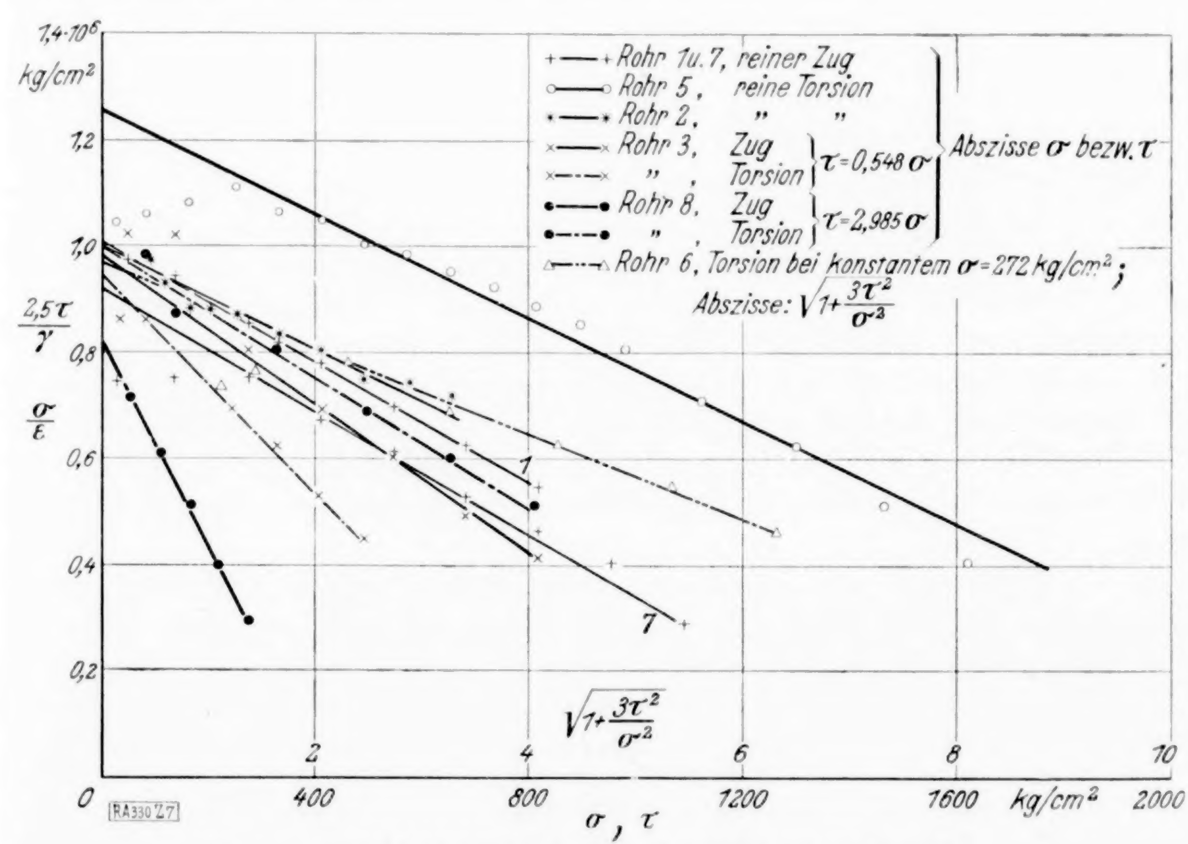
— Bei dem Torsionsversuch unter konstanter Zuglast ergeben sich Geraden, wenn man für die unter konstanter Zugspannung σ vorgenommene Torsion aufträgt:

$$2(1+\mu)\frac{\tau}{\gamma} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+3\frac{\tau^2}{\sigma^2}}.$$

Nun ist aber bei einem Versuch der letzten Art stets ein anderer Versuch vorangegangen, bei dem die Spannung σ erst aufgebracht wurde, d. h. ein Zugversuch, der E und $B+C\sqrt{\frac{2}{3}}$ liefert; mit Hilfe des darauffolgenden Torsionsversuchs berechnen sich dann B und C selbst. — Trägt man nun in einem Koordinatensystem B und C auf, so zeichne man darin die durch den Zugversuch bestimmte Gerade $B+C\sqrt{\frac{2}{3}}=\text{const}$, die durch den Torsionsversuch bestimmte Gerade $C=\text{const}$, sowie die Geraden, die durch die kombinierten Versuche bestimmt sind; es müssen diese Geraden praktisch sämtlich durch einen einzigen Punkt gehen.

2. Versuchsergebnisse. Die Versuche wurden durchgeführt mit einer im Institut für angewandte Mechanik, Göttingen, vorhandenen Maschine, mit der gleichzeitig Dehnung und Verdrehung aufgebracht werden kann; die Maschine ist eine Sonderkonstruktion der Firma Logenhausen[26]). Bei den Versuchen handelt es sich um Kombination von Zug und Torsion.

Von den Versuchsergebnissen interessieren zunächst die in dem vorangehenden Abschnitt an erster Stelle genannten Geraden, aus denen man den Elastizitätsmodul und die Größen bekommt, aus denen sich dann die Empfindlichkeiten berechnen. Abb. 7 zeigt solche Geraden, die aus eignen Versuchen stammen. Der Grund dazu, daß einige Geraden ziemlich verschiedene Elastizitätsmoduln liefern, liegt darin, daß die verwendeten Rohre eine ziemlich schlechte Qualität darstellten, wie nach Durchführung der Versuche durch Herstellung metallographischer Schliffe festgestellt wurde; es war zu erkennen, daß die Graphitverteilung in verschiedenen Querschnitten häufig nicht von gleicher Art[27]) war. Rohr 5 fällt z. B. mit seinem Elastizitätsmodul sehr stark aus dem übrigen heraus. — Im übrigen sieht man jedoch bei allen Rohren, daß die Punkte gut auf einer Geraden liegen, und daß nur die Anfangspunkte etwas abweichen. Es liegt dies in der Hauptsache daran, daß die in dem allgemeinen Elastizitätsgesetz neu eingeführten Empfindlichkeiten wesentlich die Krümmung der Kurve in dem Koordinaten-Nullpunkt bestimmen; daß man aber bei dem Versuch der Krümmungsbestimmung in einem Gebiet, wo die Kurve praktisch durch ihre Tangente ersetzt werden kann, stark streuende Ergebnisse erhalten muß, ist klar.



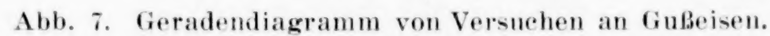


Abb. 7. Geradendiagramm von Versuchen an Gußeisen.

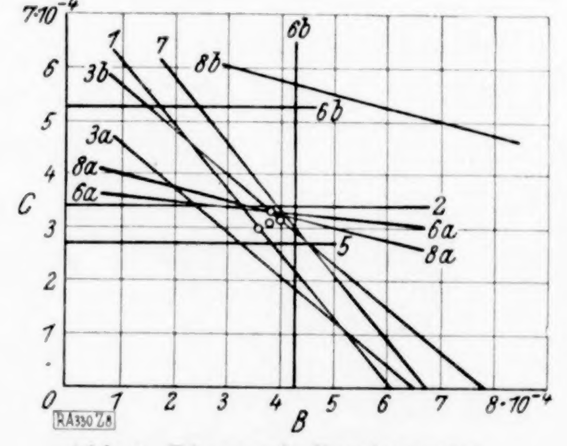


Abb. 8. Die graph. Bestimmung der Empfindlichkeiten.

[26]) Eine Ansicht der Maschine sowie eine kurze Erklärung ihrer Wirkungsweise bei R. Schmidt, Ing.-Arch. 3, 1932.

[27]) Genaueres über den Einfluß der Graphitverteilung auf den Elastizitätsmodul, vgl. H. Schlechtweg, Arch. f. d. Eisenhüttenw. 6, 1932/33, 507.

Auch bei dem Torsionsversuch unter konstanter Zugspannung ergibt sich eine gute Gerade in Abb. 7; Abb. 8 gibt die Menge der Geraden des B-C-Koordinatensystems, die sich praktisch in einem Punkte schneiden müssen. Man sieht, daß dies ziemlich gut der Fall ist, mit Ausnahme der Rohre 6 und 8, bei denen Relaxation störte. Die Übereinstimmung von Theorie und Versuch zeigen die Abb. 9 und 10 für einige Beispiele der durchgeführten Versuche. Infolge der Querschnittsabmessungen der Rohre war es bei Abb. 10 gerade so, daß Zuglast und Drehmoment in demselben Tempo gesteigert wurden. Bei Versuchen, bei denen ε und γ zeitlich in sehr verschiedener Weise geändert werden, also z. B. bei Torsion unter konstantem σ können sich Abweichungen bemerkbar machen, die auf Relaxationseinflüssen beruhen.

Hiermit sei das mitgeteilte nicht-lineare Elastizitätsgesetz als in für die technische Praxis genügendem Maße sichergestellt betrachtet mit Ausnahme des Gliedes mit L, das hier vernachlässigbar war[25]).

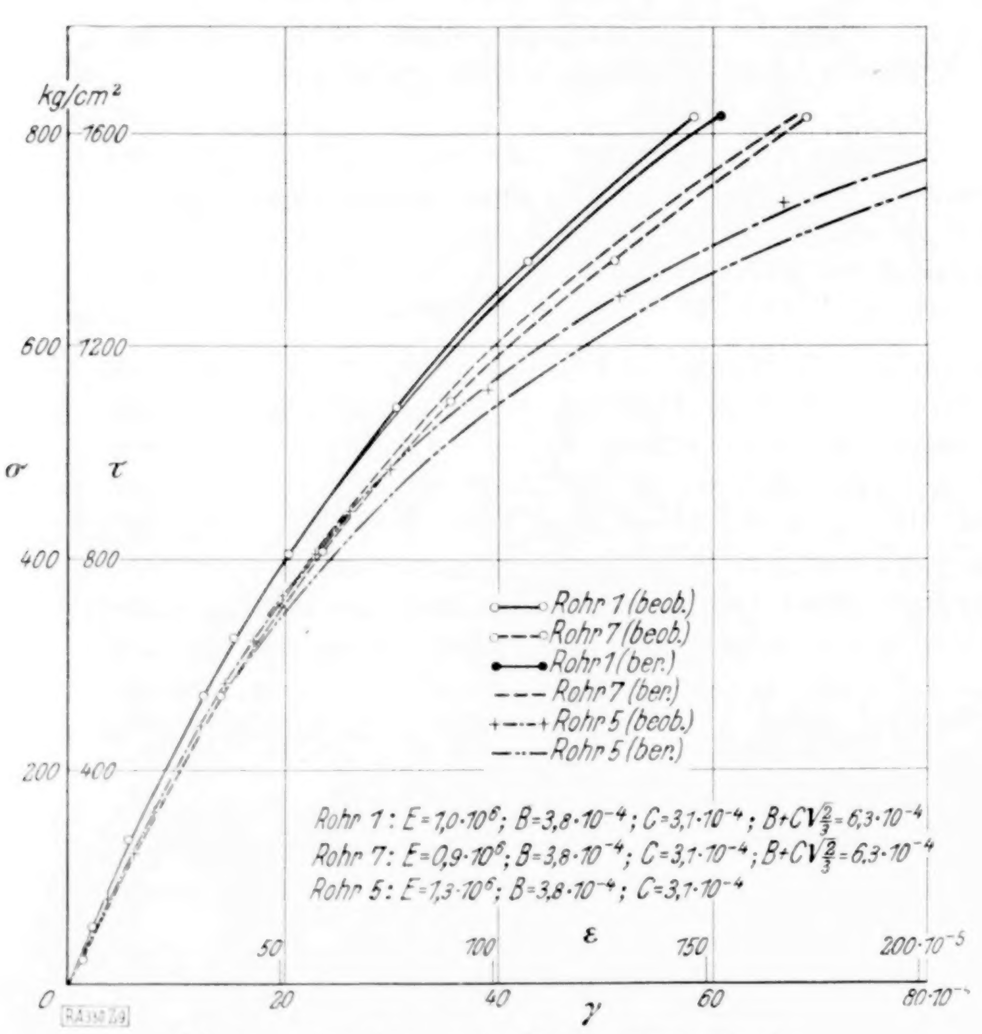


Abb. 9. Reine Zug- und reine Torsionsversuche.

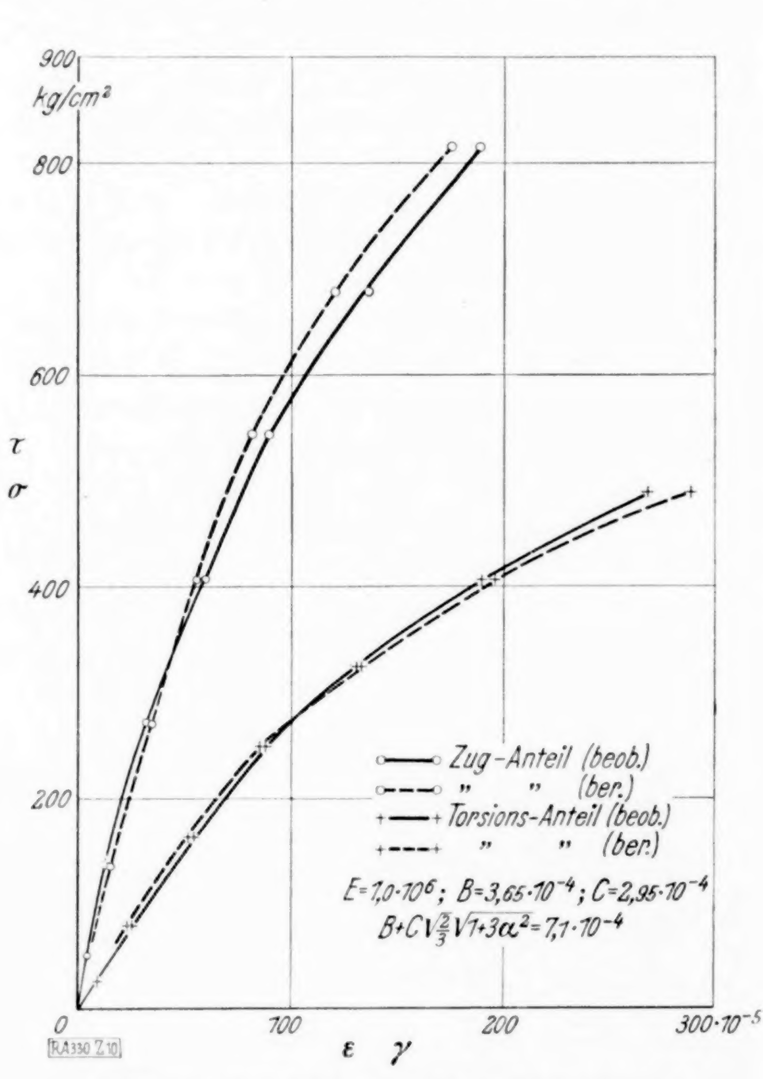


Abb. 10. Kombinierter Zug-Torsionsversuch

Zusammenfassung. Im ersten Teil der Arbeit wird ein Gesetz für mechanische Beanspruchungen im spröden Gebiet in tensorieller Form zusammengebaut mit Hilfe von Invarianten des Spannungstensors. Es zeigt sich dabei, daß der Zusammenhang zwischen den Deviatoren von Spannungstensor und Deformationstensor als sehr wesentlich abhängig von dem mittleren Zug angenommen werden muß. Es werden dabei außer dem Elastizitätsmodul und Querkontraktionskoeffizient noch drei neue Stoffziffern B, C, L, genannt „Empfindlichkeiten", eingeführt, die die spezielle „Qualität" des Materials kennzeichnen; während C im wesentlichen eingeführt ist zur Darstellung der Abweichung vom Proportionalitätsgesetz bei Schub, ist B charakteristisch für den Einfluß des mittleren Zuges bzw. Druckes; L ist etwa hundert mal kleiner als B und C, welche beide von gleicher Größenordnung sind; L wird erst z. B. bei hohen Drucken praktisch wirksam.

Auf experimentellem Weg wird gezeigt, daß man bei Bestimmung sämtlicher Stoffziffern aus der Mindestzahl der dazu nötigen Versuche in der Lage ist, mit dem so ermittelten Konstanten gleichzeitig auch andere Versuche ausreichend zu beschreiben. — Das neue Gesetz wird geprüft und bestätigt an aus Zug und Torsion kombinierten Versuchen. Dabei wird z. B. bei dem Zugversuch nicht ein Diagramm gezeichnet, in dem σ und ε eingetragen sind, sondern eines, in dem σ und $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ aufgetragen sind; in dieser Auftragung ergibt sich sowohl rechnerisch als auch versuchsmäßig eine Gerade; in ähnlicher Weise erhält man bei dem Torsionsversuch und den kombinierten Versuchen Geraden; insbesondere ergibt sich auf diese Art auch eine scharfe Bestimmungsmöglichkeit des Elastizitätsmoduls, die seither nur durch nach Augenmaß im Nullpunkt vorgenommenes Ziehen der Tangente an die Spannungs-Dehnungs-Kurve vorgenommen werden konnte. 330

Beitrag zur Theorie der Pilzdecken.

Von *S. Woinowsky-Krieger* in Berlin.

1. Einleitung. Der Ansatz von M. Lévy für die rechteckige Platte hat den wohlbekannten Vorteil, Lösungen in Form rasch konvergenter einfacher Reihen zu liefern, die zur Berechnung der Plattenspannungen vorzüglich geeignet sind.

Für die durchlaufende Platte ist eine analoge Lösung von A. Nádai[1]) veröffentlicht worden. Die von ihm angegebene einfache Summe enthält einen Bestandteil der betreffenden Doppelsumme von V. Lewe bereits summiert. A. Nádai hat seine Lösung auf den Fall der unendlich ausgedehnten, gleichmäßig belasteten und punktförmig unterstützten Pilzdecke beschränkt[2]). Infolge der zuletzt genannten Voraussetzung enthält die Lösung in den Stützpunkten Singularitäten; die Momente und Scherkräfte werden hier unendlich groß. A. Nádai hat allerdings auch Formeln für die Plattenmomente über der Stütze unter der Annahme entwickelt, daß sich der Stützendruck auf eine kleine Kreisfläche gleichmäßig verteilt. Immerhin bleibt der Anwendungsbereich der Nádaischen Lösung im Vergleich zu der allgemeineren Lösung von V. Lewe ziemlich beschränkt.

Es soll nun gezeigt werden, daß der Ansatz von der Form einer einfach unendlichen Reihe unter Aufrechterhaltung sämtlicher Voraussetzungen der Leweschen Lösung und insbesondere auch bei rechteckigen Stützflächen zum Ziele führt.

Wir betrachten im folgenden einige praktisch wichtige und zugleich typische Fälle.

2. Die unendlich ausgedehnte gleichmäßig mit p belastete Pilzdecke auf rechteckigen Stützflächen (Abb. 1). Die Verteilung des reaktiven Druckes innerhalb jeder Stützfläche $2c \times 2d$ wird als gleichmäßig vorausgesetzt. Die Größe dieses Druckes ist dementsprechend

$$q = \frac{p\,a\,b}{c\,d}.$$

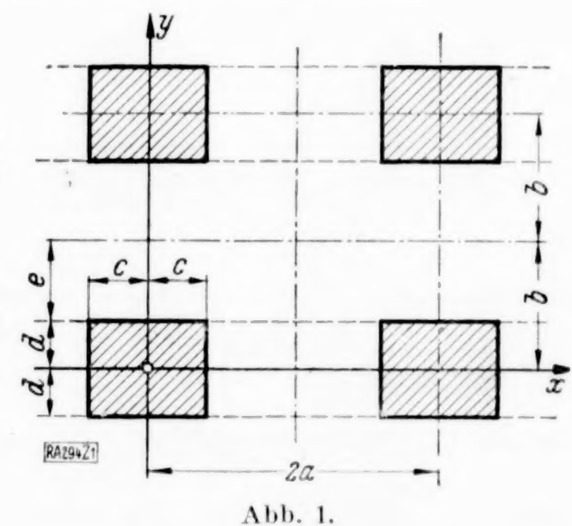


Abb. 1.

Die weiteren Betrachtungen gelten nach der Richtung x für ein beliebiges Feld. In der Richtung y unterscheiden wir zwei Gebiete[3]).

a) Der Stützenstreifen $-d \leq y \leq d$. Die Plattenausbiegung w_1 muß hier eine gerade Funktion von y sein und hat außerdem der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w_1 = \frac{p}{D} - \frac{1}{D}\left(\frac{p\,b}{d} + \frac{2\,p\,b}{c\,d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_n c\,\cos\alpha_n x}{\alpha_n}\right)$$

zu genügen. Hierbei ist zur Abkürzung $\alpha_n = n\,\pi/a$ gesetzt und ferner mit D die Plattensteifigkeit bezeichnet. Der eingeklammerte Ausdruck hat den Wert q innerhalb der Stützflächen und verschwindet außerhalb dieser Flächen.

Den vorgeschriebenen Bedingungen genügt die elastische Fläche

$$w_1 = w_0 + \frac{p\,b_0\,y^2}{D} - \frac{p\,e\,y^4}{24\,d\,D} + \frac{p\,b}{c\,d\,D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2\sin\alpha_n c}{\alpha_n^5} + a_n \operatorname{Cof}\alpha_n y + b_n y \operatorname{Sin}\alpha_n y\right)\cos\alpha_n x \quad (1).$$

Hierin sind w_0, b_0, a_n und b_n zunächst noch unbekannte Integrationskonstanten.

b) Der Feldstreifen $d \leq y \leq 2b - d$. Die zugehörige elastische Fläche w_2 muß symmetrisch zu der Feldmitte $y = b$ verlaufen. Ihre Differentialgleichung ist

$$\Delta\Delta w_2 = \frac{p}{D}.$$

[1]) Z. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 2 (1922), S. 6. — A. Nádai: Die elastischen Platten, S. 141, Berlin 1925.

[2]) Die Lösung ist hinsichtlich der Stützenstellung, sowie der Deckenbegrenzung von K. Frey verallgemeinert worden, vgl. Bauing. 1926, S. 21.

[3]) Herr Professor H. Reissner hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß sich die beiden nachfolgenden Ansätze einheitlich anschreiben lassen, wenn man von dem Verfahren der Variation der Konstanten Gebrauch macht. Ein Beispiel für die Anwendung dieser Methode (auf eine Aufgabe der Plattendynamik) siehe bei H. Reissner, Ing.-Arch. 2 (1932), S. 668.

Diese Bedingungen erfüllt die Funktion

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= w_0 + \frac{p}{D}\left[c_0 + d_0\,(b-y)^2 + \frac{(b-y)^4}{24}\right] \\ &+ \frac{p\,b}{c\,d\,D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_n\,(b-y) + d_n\,(b-y)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n\,(b-y)\right]\cos\alpha_n\,x \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

mit den Konstanten c_0, d_0, c_n und d_n.

Zur Bestimmung der vier Beiwerte a_n bis d_n für jedes $n \geqq 1$ stehen im Plattenschnitt $y = d$ die vier Bedingungen

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \Delta w_1}{\partial y} = \frac{\partial \Delta w_2}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

zur Verfügung, von denen die letztere die beiderseits dieses Schnittes auftretenden Scherkräfte q_y gleichsetzt. Die Konstanten b_0, c_0 und d_0 erhält man aus den ersten drei Bedingungen, während der Gleichheit der Scherkräfte hier bereits durch die Form des Ansatzes genügt wird. Die restliche für die Plattenspannungen belanglose Konstante w_0 ergibt sich, sofern man die Stützen als starr betrachtet, aus der Forderung $w_1 = 0$ für $x = 0$, $y = 0$.

Nach Ermittlung und Einsetzung der Konstanten in die Gl. (2) und (3) erhält man diese in der Form:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= w_0 + \frac{p\,e}{24\,d\,D}\left[2\,d\,(b+e)\,y^2 - y^4\right] \\ &- \frac{p\,a^5\,b}{\pi^5\,c\,d\,D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2 - \frac{(2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_n\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n + \delta_n\,\mathfrak{Cof}\,\beta_n\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n - \varepsilon_n\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n)\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_n\,y}{\mathfrak{Sin}^2\,\beta_n}\right. \\ &\left. + \frac{\alpha_n\,y\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n\,y}{\mathfrak{Sin}\,\beta_n}\right]\cdot\frac{\sin\alpha_n\,c\,\cos\alpha_n\,x}{n^5} \qquad (-d \leqq y \leqq d) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4),$$

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= w_0 + \frac{p}{24\,D}\left[b\,e\,(b^2 + d\,e) - 2\,e\,(b+d)\,(b-y)^2 + (b-y)^4\right] \\ &- \frac{p\,a^5\,b}{\pi^5\,c\,d\,D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_n\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n + \varepsilon_n\,\mathfrak{Cof}\,\beta_n\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n - \delta_n\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n)\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_n\,(b-y)}{\mathfrak{Sin}^2\,\beta_n}\right. \\ &\left. - \frac{\alpha_n\,(b-y)\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n\,(b-y)}{\mathfrak{Sin}\,\beta_n}\right]\cdot\frac{\sin\alpha_n\,c\,\cos\alpha_n\,x}{n^5} \qquad (d \leqq y \leqq 2\,b - d) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (5).$$

Es gelten hierbei die Abkürzungen

$$\alpha_n = \frac{n\,\pi}{a}, \qquad \beta_n = \frac{n\,\pi\,b}{a}, \qquad \delta_n = \frac{n\,\pi\,d}{a}, \qquad \varepsilon_n = \frac{n\,\pi\,e}{a} = \beta_n - \delta_n.$$

Ferner ist

$$w_0 = \frac{p\,a^5\,b}{\pi^5\,c\,d\,D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2 - \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\beta_n\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n + \delta_n\,\mathfrak{Cof}\,\beta_n\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n - \varepsilon_n\,\mathfrak{Sin}\,\delta_n}{\mathfrak{Sin}^2\,\beta_n}\right]\cdot\frac{\sin\alpha_n\,c}{n^5}.$$

Der Spannungszustand der Platte ist durch die Gl. (4) und (5) vollständig bestimmt. Im Sonderfall der punktförmigen Abstützung $c = 0$, $d = 0$ geht die Gl. (5) in die von A. Nádai angegebene Reihe über.

Für die praktische Brauchbarkeit der Lösung ist in erster Linie die Konvergenz der Reihenausdrücke für die Spannungsmomente ausschlaggebend. Die Konvergenz wollen wir an Hand einiger einfacher Sonderformeln beurteilen, die man im öfters vorkommenden Fall der quadratischen Felder und Stützenköpfe ($a = b$, $c = d$) erhält.

Setzt man $c/a = d/b = k$ und bezeichnet die Querdehnungszahl mit ν, so wird das Moment im Mittelpunkt der Stützfläche

$$\left.\begin{aligned} m_x = m_y &= -\frac{D\,(1+\nu)}{2}\,(\Delta\, w_1)_{x,\,y=0} \\ &= -(1+\nu)\,p\,a^2\left[\frac{(1-k)\,(2-k)}{12} + \frac{1}{\pi^3\,k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\,\pi\,k}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi\,(2-k)}{2}\,\sin n\,\pi\,k}{n^3\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi}\right]\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6).$$

Das Moment in Feldmitte ist gegeben durch

$$m_x = m_y = -\frac{D\,(1+\nu)}{2}\,(\Delta\, w_2)_{x,\,y=a} = (1+\nu)\,p\,a^2\left[\frac{1-k^2}{12} + \frac{1}{\pi^3\,k^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,k\,\sin n\,\pi\,k}{n^3\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi}\right] \quad (7).$$

Die Auswertung der Summe (6) vereinfacht sich weiter dadurch, daß der Ausdruck $2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\,\pi\,k}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi\,(2-k)}{2}\Big/\mathfrak{Sin}\,n\,\pi$ bereits von etwa $n = 2$ bis 3 ab durch $1 - e^{-n\,\pi\,k}$ und bei größeren n-Werten durch 1 ersetzt werden darf.

Die auf Grund der vorigen Ausdrücke für einige Verhältniswerte c/a ermittelten Momente sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Werte sind auf 0,0005 bzw. 0,00005 genau berechnet. Neben diesen Momentenwerten ist die Anzahl n_0 der Summenglieder angegeben, die sich als ausreichend erweist um den Fehler des Gesamtergebnisses auf $\pm 1\,\%$ des genauen Wertes herabzudrücken. Die etwaigen Nullglieder sind nicht mitgezählt.

Momente.

$\frac{c}{a} = k$		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	Faktor
Stützenmitte $x = 0,\ y = 0$	$m_x = m_y$	$-\infty$	$-0{,}632$	$-0{,}436$	$-0{,}311$	$-0{,}226$	$-0{,}162$	$(1+\nu)\,p\,a^2$
	n_0	—	7	5	3	3	2	—
Feldmitte $x = a,\ y = a$	$m_x = m_y$	0,1103	0,1095	0,1070	0,1026	0,0964	0,0882	$(1+\nu)\,p\,a^2$
	n_0	1	1	1	1	1	1	—

Die die Spannungsmomente darstellenden Reihen konvergieren im Stützenmittelpunkt $x = 0$, $y = 0$ langsamer als an jeder anderen Stelle der Pilzplatte. Die numerische Auswertung der Momentensummen mit der für die technischen Zwecke ausreichenden Genauigkeit erfordert demgemäß einen nur geringen Zeitaufwand[4]. Bei der Berechnung der Durchbiegung w wird man in der Regel mit zwei bis drei Summengliedern auskommen.

Einiges Interesse bietet noch der Verlauf der Scherkräfte, zu deren Ausrechnung sich die Doppelreihen recht schlecht eignen. Die Gl. (4) liefert für die Scherkraft q_y den Ausdruck

$$q_y = -D\,\frac{\partial\,\Delta\, w_1}{\partial\, y} = \frac{p\,e\,y}{d} + \frac{2\,p\,a^2\,b}{\pi^2\,c\,d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{Sin}\,\varepsilon_n\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n\,y}{\mathfrak{Sin}\,\beta_n}\cdot\frac{\sin \alpha_n\,c\,\cos \alpha_n\,x}{n^2} \qquad (-d \leq y \leq d) \quad . \quad (8).$$

Der Größwert dieser Scherkraft ist an der Grenze $y = d$ des Druckgebietes zu erwarten. Im Sonderfall $a = b$, $c = d$ ergibt sich mit der Bezeichnung $c/a = k$ die Kraft

$$(q_y)_{y=d} = p\,e + \frac{p}{\pi^2\,k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,k\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,(1-k)}{\mathfrak{Sin}\,n\,\pi}\cdot\frac{\sin n\,\pi\,k\,\cos\frac{n\,\pi\,x}{a}}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

[4]) Das Werk: K. Hayashi, Tafeln für die Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen, Berlin 1933, enthält eine für die Auswertung der Lösung sehr wertvolle Tabelle der Hyperbel- und Exponentialfunktionen vom Argument πx. Daneben kommen die „Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen", Berlin 1926, des gleichen Verfassers in Betracht.

Der erste Faktor unter dem Summenzeichen darf bei größeren Werten n gleich 1 gesetzt werden.

Der Verlauf der Scherkraft (9) für den Sonderwert $k = 0{,}3$ geht aus der Abb. 2 hervor. Die Spitzenordinate der q_y-Kurve, d. h. die in der Mitte der Stützenkopfkante auftretende Scherkraft, findet man für drei Verhältniswerte k in der nachstehenden Tabelle. Die Anzahl n_0 der Summenglieder stellt das Ergebnis der Auswertung auf 1 ‰ sicher.

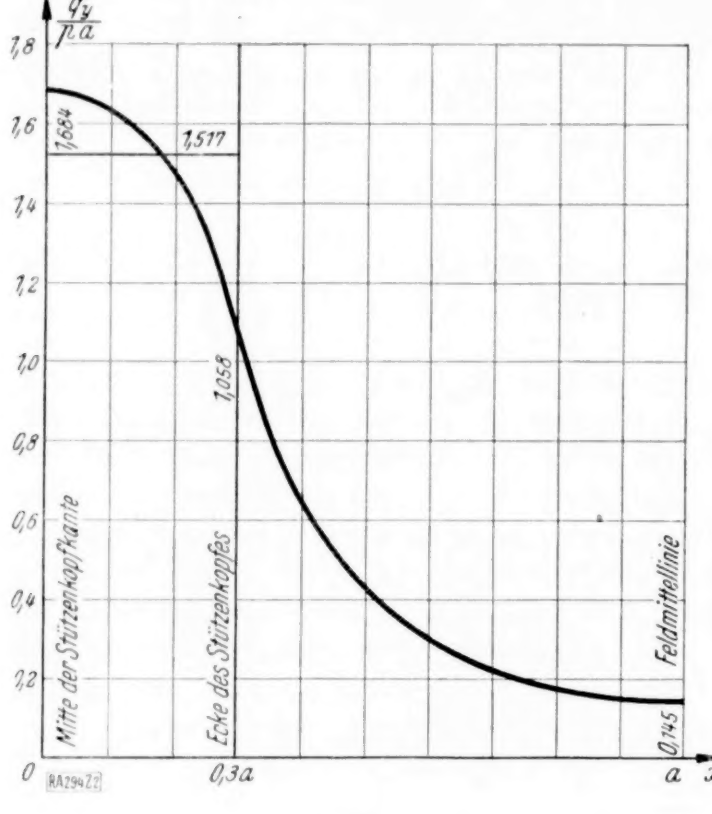


Abb. 2.

Scherkräfte.

$\frac{c}{a} = k$	0,1	0,3	0,5	Faktor
q_y in $x = 0$, $y = d$	5,46	1,684	0,838	$p\,a$
n_0	20	7	3	—

Denkt man sich die gesamte an dem Umfange der Stützfläche auftretende Scherkraft auf die Länge $8\,c = 8\,k\,a$ dieses Umfanges gleichmäßig verteilt, so erhält man die Näherungsformel

$$q' = \frac{p\,a\,(1 - k^2)}{2\,k}.$$

Für die obigen drei Verhältniswerte k liefert die Formel die Scherkräfte $q' = 4{,}95\,p\,a$, $1{,}517\,p\,a$ und $0{,}750\,p\,a$. Die errechneten Maximalkräfte übertreffen diese Durchschnittswerte um 10 bis 12 ‰. Der Unterschied ist gering und seiner relativen Größe nach von k nahezu unabhängig.

Die in den Gl. (4) und (5) enthaltene Lösung kann als Grundlage zur Aufstellung einiger weiterer Lösungen benutzt werden. Die Pilzplatte trage beispielsweise in der Mitte eines jeden Feldes eine Einzellast P, die sich gleichmäßig auf ein zu dem Felde seitenparalleles Rechteck verteile. Die zugehörige elastische Fläche ergibt sich dann durch Überlagerung zweier Lösungen je von der Art (4) bis (5). Die eine Fläche ist für die gleichmäßige Belastung mit $p = P/4\,a\,b$, die andere für $-p$ anzuschreiben. Beide Flächen (I) und (II) sind schließlich unter Zugrundelegung der Koordinatenbeziehungen $x_{\rm I} + x_{\rm II} = a$, $y_{\rm I} + y_{\rm II} = b$ gegeneinander zu verschränken.

3. Die unendlich ausgedehnte streifenweise belastete Pilzdecke. Dieser Belastungsfall ist für die Feldmomente bekanntlich der ungünstigste. Die in der Abb. 1 dargestellte Pilzplatte trage im Streifen $0 < x < 2\,a$ und in jedem zweiten weiteren Streifen eine gleichmäßige Belastung p, die dazwischen liegenden Streifen seien unbelastet. Bei dieser Lastanordnung übertragen die Stützen auf die Platte gewisse um die y-Achse drehende Momente, die als statisch unbestimmbare Größen aufzufassen und zu berechnen sind. Wir bezeichnen den absoluten Betrag dieser Momente mit M_x. Ihre Einwirkung auf die Pilzplatte soll unter Zugrundelegung einer geradlinigen Spannungsverteilung im waagerechten Schnitt durch den Stützenkopf ermittelt werden (Abb. 3).

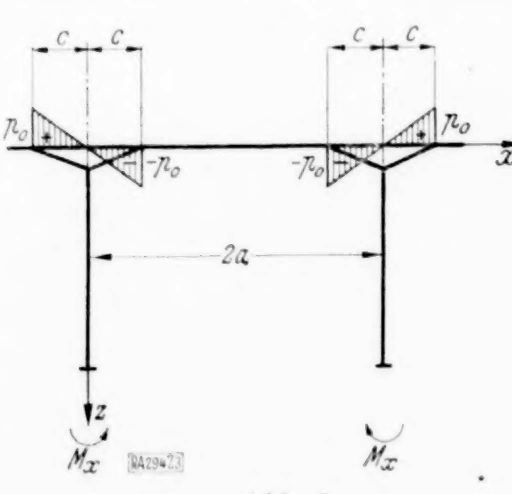


Abb. 3.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen lautet die Differentialgleichung der betreffenden Plattenausbiegung w' in dem Stützenstreifen $(-d \leqq y \leqq d)$:

$$\Delta\Delta w_1' = -\frac{6\,M_x}{a\,c^3\,d\,D} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}\left(\sin\frac{\alpha_n c}{2} - \frac{\alpha_n c}{2}\cos\frac{\alpha_n c}{2}\right)\sin\frac{\alpha_n x}{2}.$$

Der mit D multiplizierte rechte Teil dieser Gleichung stellt die aus der Abb. 3 ersichtliche unstetige Lastfunktion dar; die Spitzenordinate p_0 der Abbildung ist hierbei durch $3\,M_x/4\,c^2\,d$ ersetzt.

In dem Feldstreifen ($d \leq y \leq 2\,b - d$) heißt die Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w_2' = 0 .$$

Im übrigen gelten die im Abschnitt **2** aufgezählten Bedingungen. Alle gestellten Forderungen erfüllt die durch die folgenden beiden Gleichungen gegebene elastische Fläche:

$$w_1' = -\frac{48\,M_x\,a^5}{\pi^6\,c^3\,d\,D} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left\{ \left[2 - \frac{\left(2\,\mathfrak{Sin}\frac{\beta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{\delta_n}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\beta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon_n}{2} - \frac{\varepsilon_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\delta_n}{2}\right)\mathfrak{Cof}\frac{\alpha_n\,y}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\beta_n}{2}} + \frac{\alpha_n\,y\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\alpha_n\,y}{2}}{2\,\mathfrak{Sin}\frac{\beta_n}{2}} \right] \cdot \frac{\left(\sin\frac{\alpha_n\,c}{2} - \frac{\alpha_n\,c}{2}\cos\frac{\alpha_n\,c}{2}\right)\sin\frac{\alpha_n\,x}{2}}{n^6} \qquad (-d \leq y \leq d) \right\} \quad (10),$$

$$w_2' = -\frac{48\,M_x\,a^5}{\pi^6\,c^3\,d\,D} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\left(2\,\mathfrak{Sin}\frac{\beta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\delta_n}{2} + \frac{\varepsilon_n}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{\beta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\delta_n}{2} - \frac{\delta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon_n}{2}\right)\mathfrak{Cof}\frac{\alpha_n\,(b-y)}{2}}{\mathfrak{Sin}^2\frac{\beta_n}{2}} - \frac{\alpha_n\,(b-y)\,\mathfrak{Sin}\frac{\delta_n}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{\alpha_n\,(b-y)}{2}}{2\,\mathfrak{Sin}\frac{\beta_n}{2}} \right] \cdot \frac{\left(\sin\frac{\alpha_n\,c}{2} - \frac{\alpha_n\,c}{2}\cos\frac{\alpha_n\,c}{2}\right)\sin\frac{\alpha_n\,x}{2}}{n^6} \qquad (d \leq y \leq 2\,b - d) \right\} \quad (11)$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha_n = \frac{n\,\pi}{a}, \qquad \beta_n = \frac{n\,\pi\,b}{a}, \qquad \delta_n = \frac{n\,\pi\,d}{a}, \qquad \varepsilon_n = \frac{n\,\pi\,e}{a} = \beta_n - \delta_n .$$

In ähnlicher Weise läßt sich jede andere Art der Verteilung von Biegungsspannungen im Stützenkopf berücksichtigen.

Die resultierende Plattenausbiegung ist

$$w_1 = w_1' + \frac{w_1'' + w'''}{2} \qquad (d \leq y \leq d)$$

bzw.

$$w_2 = w_2' + \frac{w_2'' + w'''}{2} \qquad (d \leq y \leq 2\,b - d).$$

w_1'' und w_2'' sind durch die Gl. (4) bzw. (5) gegeben; w''' ist als elastische Linie des freiaufliegenden einfachen Balkens nach der Gleichung

$$w''' = \pm \frac{p}{24\,D}(x^4 - 4\,a\,x^3 + 8\,a^3\,x)$$

zu berechnen. Das obere Vorzeichen gilt für den belasteten Streifen der Pilzplatte, das untere für den unbelasteten.

Auch für den Fall der Einspannungsmomente M_y ließe sich die betreffende elastische Fläche ohne Schwierigkeit angeben, und zwar unter Beibehaltung der Fourierentwicklung in der Veränderlichen x.

4. Die seitlich begrenzte Pilzdecke. Die Pilzplatte sei entweder durch zwei parallele Ränder oder rechteckig begrenzt; es möge eine freie Abstützung der Platte auf diesen Rändern vorausgesetzt werden. Die rechteckigen Zwischenstützflächen seien seitenparallel zu der äußeren Plattenberandung angeordnet. Die Berechnung einer derartigen Pilzplatte läuft offenbar auf die Berechnung eines freigestützten Plattenstreifens bzw. einer allseitig freiaufliegenden Rechteckplatte unter Rechtecklasten hinaus[5]).

[5]) Der orthogonal-anisotrope Plattenstreifen unter einer Rechtecklast ist bereits von M. T. Huber im Bauing. 1925, S. 14 behandelt worden.

Wir betrachten einen auf $x=0, a$ freiaufliegenden Plattenstreifen, der eine gleichmäßig auf eine Rechteckfläche $2c \times 2d$ verteilte Last $P = 4pcd$ trägt (Abb. 4).

Abb. 4.

Eine Linienlast von der Größe $p \cdot 2c$ in $\xi - c \leq x \leq \xi + c$, $\eta = 0$ (wir ersetzen vorübergehend y durch η) erzeugt an der Stelle x, η die Durchbiegung[6])

$$w_+(x,\eta) = \frac{p}{a\,D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n \eta}}{\alpha_n^4} (1 + \alpha_n \eta) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \qquad (\eta \geq 0)$$

bzw.

$$w_-(x,\eta) = \frac{p}{a\,D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{+\alpha_n \eta}}{\alpha_n^4} (1 - \alpha_n \eta) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x \qquad (\eta \leq 0).$$

Hier gilt die Abkürzung $\alpha_n = n\pi/a$.

Die gesamte Rechtecklast erzeugt dann an der Stelle x, y die folgende Durchbiegung: innerhalb des Laststreifens $(-d \leq y \leq d)$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \int_{y-d}^{0} w_-(x,\eta)\,d\eta + \int_{0}^{y+d} w_+(x,\eta)\,d\eta \\ &= \frac{P a^4}{2\pi^5 c\,d\,D} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{2 + e^{-\alpha_n d}\left[\alpha_n y \,\mathfrak{Sin}\, \alpha_n y - (2 + \alpha_n d)\,\mathfrak{Cof}\, \alpha_n y\right]\right\} \cdot \frac{\sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x}{n^5} \end{aligned}\right\} \quad (12),$$

außerhalb des Laststreifens $(y \geq d)$

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= \int_{y-d}^{y+d} w_+(x,\eta)\,d\eta \\ &= \frac{P a^4}{2\pi^5 c\,d\,D} \sum_{n=1}^{\infty} (2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n d - \alpha_n d\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_n d + \alpha_n y\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n d) \cdot \frac{e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n c \sin \alpha_n x}{n^5} \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Im Gebiet $y \leq d$ ist das y des letzteren Ausdruckes durch $-y$ zu ersetzen.

Mit $c = a/2$, $P = 2pad$ und $d = \infty$ geht die Gl. (12) in die elastische Fläche eines gleichmäßig mit p belasteten Plattenstreifens über.

In analoger Weise ließe sich die Gleichung des verbogenen Plattenstreifens unter einem an einer Rechteckfläche angreifenden Moment M_x ableiten.

Die Einwirkung einer unendlichen Reihe von Zwischenstützen auf den Plattenstreifen kommt dem Einfluß eines regelmäßigen Lastenzuges aus negativen Lasten nach der Abb. 4 gleich. Die Summation der betreffenden Reihe über y läßt sich ohne Schwierigkeit ausführen. Zwei in der y-Richtung gegenseitig verschränkte Lastenzüge verschiedenen Vorzeichens liefern die elastische Fläche einer allseitig freigestützten rechteckigen Platte unter einer Rechtecklast. Dieselbe Lösung läßt sich durch die Aufstellung getrennter Differentialgleichungen für drei Teilgebiete der Rechteckplatte gewinnen.

Es liegt nahe, das im Abschnitt 2 benutzte Verfahren auf die durchlaufende Fundamentplatte auf elastischem Untergrund anzuwenden. Im Feldstreifen wird man mit der bekannten Westergaardschen Lösung auskommen, die Lastbedingungen im Stützenstreifen müssen auf eine Kombination der Westergaardschen Lösung mit einer einfachen[7]) Reihe vom Typus der Leweschen Reihen führen. 294

[6]) Vgl. A. Nádai: Die elastischen Platten, S. 78 bis 81.

[7]) Hierdurch wird sich die angedeutete Lösungsform von der Lösungsform nach P. Neményi unterscheiden, die die Westergaardsche einfache Reihe als Ergänzung der Leweschen Doppelreihe enthält und die elastische Fläche einer streifenartigen Fundamentplatte darstellt. Vgl. Beton u. Eisen 1928, S. 448.

Korrelationsmodelle.

Von *H. Pollaczek-Geiringer* in Brüssel.

Herrn Prof. Dr. H. Reissner zum sechzigsten Geburtstag.

Die Korrelationstheorie steht vor der Aufgabe, aus der Angabe irgendeiner — etwa zweidimensionalen — Verteilung $v(x, y)$ Schlüsse zu ziehen über die gegenseitige Abhängigkeit der Variablen. Die Variablen heißen „unabhängig", oder „stochastisch unabhängig" (d. h. unabhängig im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung), wenn $v(x, y)$ in ein Produkt zweier Funktionen von x bzw. y allein zerfällt; $v(x, y) = v_1(x) \cdot v_2(y)$, dann gehören nämlich zu einem bestimmten $x = x_1$ noch alle Werte y, für die $v_1(x_1) \cdot v_2(y) = \text{const}\, v_2(y)$ von Null verschieden ist und analog für $y = y_1$. Das entgegengesetzte Extrem bildet der Fall der eigentlichen oder „funktionalen" Abhängigkeit, der dahin erklärt werden kann, daß es zu jedem $x = x_1$ nur ein y_1 gibt, so daß $v(x_1, y_1) \neq 0$ und umgekehrt; d. h. es liegen alle Punkte (x, y), denen von Null verschiedene $v(x, y)$ entsprechen, auf einer monoton zunehmenden oder monoton abnehmenden Kurve. (Man kann auch in etwas weiterem Sinne zulassen, daß die in Rede stehende Kurve monoton nicht abnehmend, bzw. monoton nicht zunehmend ist, wie überhaupt diese Erklärungen bis zu einem gewissen Grade variiert werden können.) Liegt keiner der beiden Grenzfälle vor, sind die Variablen nicht funktional abhängig, aber auch nicht stochastisch unabhängig, so bezeichnet man sie als stochastisch abhängige Variable.

Man hat auf vielerlei Arten einzelne Zahlen als Maß dieser Abhängigkeitsverhältnisse eingeführt. Die bekanntesten sind wohl[1]) der Korrelationskoeffizient r (Bravais-Galton) und das Pearsonsche Kontingenzmaß f^2. Alle diese Zahlen werden meist so normiert, daß sie in den (noch jeweils zu präzisierenden) Grenzfällen die Werte 0 bzw. ± 1 annehmen, sonst im allgemeinen zwischen 0 und ± 1 liegen. Nun ist es ja auf keine Weise möglich, mit der Angabe einer einzigen Zahl genaue Vorstellungen über die Abhängigkeitsverhältnisse einer zweidimensionalen Verteilung zu verbinden. Was „bedeutet" z. B. $r = 0{,}6$ oder $f^2 = 0{,}7$? Welcher Fall zeigt engere Abhängigkeit? Haben solche Fragen überhaupt einen Sinn?

Ausgehend von Überlegungen dieser Art stellen wir uns die Aufgabe, einfache, anschauliche theoretische „Modelle" von Verteilungen anzugeben, für die man alle gewünschten Maße, z. B. r und f^2 explizite ausrechnen kann, derart, daß man sodann durch Vergleich mit dem entsprechenden Modellfall eine konkretere Vorstellung über die Abhängigkeitsverhältnisse einer vorgelegten (empirischen oder theoretischen) Verteilung gewinnt. Ziel ist, eine (womöglich nur zweiparametrige) Schaar von Verteilungen anzugeben, so daß jedes vorgegebene Wertepaar r, f^2 durch ein Modell der Schaar realisiert wird.

§ 1

1. Erklärung von r, von f^2 und verwandten Maßen. Ist eine arithmetische Verteilung $v(x, y)$ vorgelegt mit $\sum\limits_{x,y} v(x, y) = 1$, so bezeichnen wir die Momente 1. und 2. Grades mit

$$\left.\begin{array}{lll} a = \sum\limits_{x,y} x\, v(x, y); & b = \sum\limits_{x,y} y\, v(x, y) & \\ M_{20}{}^0 = \sum\limits_{x,y} x^2\, v(x, y); & M_{11}{}^0 = \sum\limits_{x,y} x\, y\, v(x, y); & M_{02}{}^0 = \sum\limits_{x,y} y^2\, v(x, y) \\ M_{20} = \sum\limits_{x,y} (x - a)^2\, v(x, y); & M_{11} = \sum\limits_{x,y} (x - a)(y - b)\, v(x, y); & M_{02} = \sum\limits_{x,y} (y - b)^2\, v(x, y) \end{array}\right\} \quad . \quad (1),$$

dabei ist bekanntlich

$$M_{20} = M_{20}{}^0 - a^2; \quad M_{11} = M_{11}{}^0 - a\, b; \quad M_{02} = M_{02}{}^0 - b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Mit diesen Bezeichnungen erklärt man als Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{M_{11}}{\sqrt{M_{20} M_{02}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

r ist ein Maß mit Vorzeichen. Es wird $+1$ bzw. -1, dann und nur dann, wenn die funktionale Abhängigkeit linear ist, d. h. wenn die oben erwähnte monotone Kurve eine Gerade ist. Bei nicht linearer funktionaler Abhängigkeit kann sogar das andere Extrem $r = 0$ eintreten. Den Wert 0 nimmt r an, wenn $M_{11} = 0$, d. h. wenn die Verteilung auf „Haupt-

[1]) Aus neuester Zeit nenne ich noch ein originelles kombinatorisches Maß von H. Schelling, Zs. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 12 (1932), S. 377—380, ein dem Pearsonschen Maß verwandtes, in gewisser Beziehung überlegenes von J. F. Steffensen (Annales de l'Instit. Henri Poincaré (1933), III, S. 326 ff.) und ein viel allgemeineres, auf der sogenannten Summenfunktion basierendes von H. Pollaczek-Geiringer (Zs. f. ang. Math. u. Mech., Bd. 13, S. 121 bis 124).

achsen" bezogen ist, also keinesfalls nur im Falle der Produktverteilung. Dies ist aber auch von einem Maß mit Vorzeichen nicht zu verlangen. Ein solches wird stets zufolge gewisser Symmetrieeigenschaften verschwinden können. Entsprechend diesen Verhaltungsweisen in den Grenzfällen lassen erst recht die Zwischenwerte zwischen 0 und ± 1 keine stets einwandfreie Deutung zu. Dennoch ist die Berechnung von r, wenn man sich nur der angedeuteten Möglichkeiten bewußt ist, für eine erste Orientierung sehr geeignet.

Gibt man eine arithmetische Verteilung durch ihre Einzelwahrscheinlichkeiten $v(x, y)$ an, wobei x und y die Punkte eines Quadrats

$$x = 1, 2, \ldots k; \quad y = 1, 2, \ldots k \qquad (4)$$

durchlaufen, so bezeichne

$$v_1(x) = \sum_y v(x, y); \quad v_2(y) = \sum_x v(x, y) \qquad (5)$$

$$f^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{x, y} \frac{(v(x, y) - v_1(x)\, v_2(y))^2}{v_1(x)\, v_2(y)} \qquad (6).$$

Bezeichnet man dann mit

$$S = \sum_{x, y} \frac{[v(x, y)]^2}{v_1(x)\, v_2(y)} \qquad (7),$$

so ist, wie man sofort durch Vergleich mit (6) sieht,

$$f^2 = \frac{1}{k-1}(S-1) \qquad (8),$$

f^2 ist das Pearsonsche Kontingenzmaß.

Wie sich zeigen wird, hat es auch guten Sinn, statt f^2 gelegentlich das damit unmittelbar zusammenhängende

$$g^2 = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{S-1}{S}, \text{ also } g^2 = \frac{k f^2}{1 + f^2 (k-1)} \qquad (8')$$

zu verwenden. f^2 verschwindet nur im Falle der Produktverteilung, es erhält den Wert $+1$ nur im Falle monoton zunehmender, bzw. monoton abnehmender Trägerkurve. Doch ist die Erklärung von f^2 auf arithmetische Verteilungen $v(x, y)$ beschränkt.

An die hier gegebenen Erläuterungen läßt sich die Definition des Steffensenschen Maßes unmittelbar anschließen. Es wird gesetzt mit den Bezeichnungen (5):

$$p^2 = \sum_{x, y} \frac{[v(x, y) - v_1(x)\, v_2(y)]^2}{v_1(x)\, v_2(y)} \cdot \frac{v(x, y)}{(1 - v_1(x))(1 - v_2(y))} \qquad (9).$$

p^2 verschwindet nur bei Produktionsverteilungen und wird gleich $+1$ nur bei monotoner Trägerkurve. Der für manche Zwecke nachteilige Nenner $(k-1)$ von (6) ist hier vermieden. — Auf weitere Maße gehen wir an dieser Stelle nicht ein.

2. Unstetiges Überdeckungsmodell. Ehe wir dazu übergehen, die allgemeine Aufgabe vollständig zu formulieren, wollen wir — als ersten Schritt der Lösung — ein einfaches und sehr anschauliches Modell diskutieren. Wir betrachten den folgenden Wiederholungsvorgang: Seien n und m zwei positive ganze Zahlen mit $n \geqq m$. Man spielt $(2n - m)$-mal mit einer Münze auf „Kopf", „Wappen", oder auf „0" „1", wobei dafür jeweils die Wahrscheinlichkeiten p und q bestehen $(p + q = 1)$. Das zweidimensionale Merkmal ist die Summe x der n ersten und die Summe y der n letzten Würfe. Ist z. B. $n = 5$, $m = 3$, so werden jeweils 7 Würfe gemacht und die Summe der ersten 5 Würfe (des 1. bis 5.) mit x, die der letzten 5 Würfe (des 3. bis 7.) mit y bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit $v(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Ergebnis x, y zu erhalten. Offenbar ist sowohl x wie y nur der Werte $0, 1, \ldots, n$ fähig, also nach (4)

$$k = n + 1.$$

Ersichtlich besteht eine Korrelation, die um so enger ist, je näher an 1 das Verhältnis m/n rückt, d. h. ein je größerer Anteil aller Würfe gleichzeitig für die erste Summe x und für die zweite Summe y zählen. Für $m = 0$ besteht offenbar Unabhängigkeit, für $m = n$ volle Abhängigkeit. Die Größen m, n und q sind als verfügbare Parameter zu betrachten.

Wir wollen zunächst $v(x, y)$ angeben, daraus r und f^2 berechnen, die Verwendung des Modells erläutern und sehen, ob das Modell allgemein genug ist.

Wir nehmen vorweg den Fall $m = n - 1$, also $2n - m = n + 1$. Hier ist die Korrelation ersichtlich eine sehr enge, da alle Würfe bis auf je einen für das Ergebnis x und für das Ergebnis y gemeinsam sind. Wie man sofort sieht, ist hier $v(x, x) \neq 0$, $v(x, x+1) = v(x+1, x) \neq 0$, alle anderen $v(x, y)$ gleich Null. Bezeichnet man mit $w_\nu(x)$ die arithmetische Wahrscheinlichkeit (Bernoullische Verteilung) in ν Würfen auf 0 und 1 mit den Wahrscheinlichkeiten p, q $(p + q = 1)$ gerade x Einsen zu erzielen, also

$$\left.\begin{aligned} w_\nu(x) &= \binom{\nu}{x} q^x p^{\nu - x} \qquad (x = 0, 1, \ldots \nu) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad (x < 0, x > \nu) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10),$$

so ist ersichtlich

$$\left.\begin{aligned} v(x, x) &= q^2 w_{n-1}(x-1) + p^2 w_{n-1}(x) \qquad (x = 0, 1, \ldots n) \\ v(x, x+1) &= v(x+1, x) = p\,q\,w_{n-1}(x) \qquad (x = 0, 1, \ldots n-1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11).$$

Denn „die Summe der n ersten Würfe gleich x“ und „die Summe der letzten n Würfe gleich x“ tritt ein entweder, wenn der erste und der letzte Wurf jeder gleich Null sind, und die $(n-1)$ gemeinsamen „mittlern“ Würfe zusammen die Summe x haben (Wahrscheinlichkeit dafür ist $p^2 w_{n-1}(x)$ oder wenn diese mittlern Würfe zusammen die Summe $(x-1)$ zeigen und der erste wie der letzte Wurf 1 ergaben (Wahrscheinlichkeit dafür ist $q^2 w_{n-1}(x-1)$. Die erste Summe gleich x, die zweite gleich $(x+1)$ tritt auf, wenn die gemeinsamen Würfe die Summe x zeigen, der erste gleich Null, der letzte gleich 1 ist (Wahrscheinlichkeit dafür ist $p\,q\,w_{n-1}(x-1)$).

Aus (11) rechnen wir die Zeilen- bzw. Spaltensummen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v(x, x-1) + v(x, x) + v(x, x+1) \\ &= p\,q\,w_{n-1}(x-1) + q^2 w_{n-1}(x-1) + p^2 w_{n-1}(x) + p\,q\,w_{n-1}(x) \\ &= q\,w_{n-1}(x-1) + p\,w_{n-1}(x) = w_n(x), \end{aligned}$$

also nach (5)

$$v_1(x) = w_n(x); \quad v_2(y) = w_n(y) \quad \ldots \quad (12),$$

daraus folgt

$$a = 1 \cdot w_n(1) + 2 \cdot w_n(2) + \ldots + n\,w_n(n) = \sum_{x=0}^{n} x\,w_n(x) = n\,q \quad \ldots \quad (13),$$

d. h. $\qquad a = b = n\,q$

und ähnlich erhält man

$$\left.\begin{aligned} M_{20} &= M_{02} = n\,p\,q \\ M_{11} &= (n-1)\,p\,q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13')$$

und somit

$$r = \frac{n-1}{n} \quad \ldots \quad (14)$$

unabhängig von q. Bei großem n geht also mit $n \to \infty$, $r \to 1$, wie es auch anschaulich ist.

Wir wollen nun f^2 rechnen [2]). Es ist nach (7)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x, y} \frac{v^2(x, y)}{v_1(x)\,v_2(y)} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{[v(x, x)]}{[w_n(x)]^2} + 2 \sum_{x=0}^{n-1} \frac{[v(x, x+1)]^2}{w_n(x)\,w_n(x+1)} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \left[\frac{q^2 w_{n-1}(x-1) + p^2 w_{n-1}(x)}{w_n(x)}\right]^2 + 2 \sum_{x=0}^{n-1} \frac{p^2 q^2 [w_{n-1}(x)]^2}{w_n(x)\,w_n(x+1)} = S_1 + 2\,S_2\,. \end{aligned}$$

[2]) Hier folgt noch die Ausrechnung. In weitern ähnlichen Fällen wollen wir diese übergehen.

Die erste eckige Klammer ergibt nun, wenn man aus (10) einsetzt:

$$\frac{q^x p^{n-x}\binom{n-1}{x-1}\left(q+\frac{n-x}{x}p\right)}{q^x p^{n-x}\binom{n}{x}}=q\frac{x}{n}+p\frac{n-x}{n},$$

also

$$S_1=\frac{1}{n^2}\sum_{x=0}^{n}[q\,x+p\,(n-x)]^2,$$

und analog ist in S_2:

$$\frac{p^2 q^2\binom{n-1}{x}^2 q^{2x} p^{2(n-1-x)}}{\binom{n}{x}q^x p^{n-x}\binom{n}{x+1}q^{x+1}p^{n-x-1}}=\frac{q\,p\binom{n-1}{x}^2}{\binom{n}{x}\binom{n}{x+1}}=\frac{q\,p}{n^2}(x+1)(n-x),$$

also

$$2\,S_2=\frac{2\,p\,q}{n^2}\sum_{x=0}^{n-1}(n-x)(x+1)$$

und:

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{q^2}{n^2}\sum_{x=0}^{n}x^2+\frac{p^2}{n^2}\sum_{x=0}^{n}(n-x)^2+\frac{2\,p\,q}{n^2}\sum_{x=0}^{n}x\,(n-x)+\frac{2\,p\,q}{n^2}\sum_{x=0}^{n}(x+1)(n-x)\\&=\frac{p^2+q^2+2\,p\,q}{n^2}\sum_{x=0}^{n}x^2=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)\end{aligned}\right\}\quad(16).$$

Somit, da $(k-1)=n$:

$$f^2=\frac{1}{n}(S-1)=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(17).$$

Es ist also auch f^2 unabhängig von q. Doch bemerkt man, daß f^2 für $n\to\infty$ nicht wie r gegen 1, sondern merkwürdigerweise gegen 1/3 konvergiert.

Man würde meinen, daß für lim $n\to\infty$ das Korrelationsmaß f^2 gleich 1 werden müßte, denn wenn bei im ganzen $(n+1)$ Würfen $(n-1)$ gemeinsame sind, besteht offenbar bei beliebig wachsendem n beliebig enge Abhängigkeit für das betrachtete Spiel. Das befremdende Ergebnis 1/3 wird offenbar durch den Nenner $(k-1)$ in (6) hervorgerufen.

Von diesen Schwierigkeiten frei ist das durch (8') gegebene g^2. Für dieses kommt in unserem Modell:

$$g^2=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{3}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}}{\frac{1}{3}n+\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2\,n^2-3\,n+1}{2\,n^2+3\,n+1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(18),$$

also insbesonders $g^2=1$ für $n\to\infty$.

Noch ein Beispiel möge dieses merkwürdige Verhalten von f^2 illustrieren: Nehmen wir an, die Variable x durchlaufe die Werte $x=1,2,\ldots k$, aber $y=1,2,\ldots l$ mit $l<k$. Dann tritt in (6) an Stelle des Nenners $(k-1)$ der Nenner $(l-1)$ [3]. Nun nehmen wir folgendes Modell: Der einzelne Wiederholungsvorgang bestehe aus je n Null-Eins-Würfen (Wahrscheinlichkeiten p,q; $p+q=1$), x bezeichne die Gesamtzahl der Einsen in sämtlichen n Würfen; y die Gesamtzahl der Einsen in den ersten $(n-1)$ Würfen. Offenbar besteht eine sehr enge Korrelation. Es ist mit den obigen Bezeichnungen:

$$v(x,x)=p\,w_{n-1}(x);\quad v(x+1,x)=q\,w_{n-1}(x)\quad(x=0,1,\ldots n-1),$$

[3]) Vgl. H. Pollaczek-Geiringer, l. c. [1]), S. 121.

alle anderen $v(x,y)$ sind gleich 0. Rechnet man r, so erhält man, analog zu dem früheren, das plausible Resultat

$$r = \frac{n-1}{n}.$$

Rechnet man f^2 und beachtet, daß hier $l = n$, so ergibt eine einfache Rechnung:

$$f^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2},$$

also unabhängig von n, was jeder Anschauung widerspricht, da die Korrelation doch offenbar mit n wächst. Für g^2 hingegen kommt

$$g^2 = \frac{n}{n+1},$$

was vernünftig erscheint.

Diese Überlegungen zeigen, daß, sofern man an der üblichen Definition (6) von f^2 festhält, man insbesonders einen sich ergebenden kleinen Wert von f^2 entsprechend werten muß und daraus keine falschen Schlüsse auf „schwache Korrelation" ziehen soll.

3. Unstetiges Überdeckungsmodell (Fortsetzung). Nachdem der Fall $n = m + 1$ erledigt ist, werde nun der allgemeine Fall zweier positiver ganzer Zahlen n, m $(n \geq m)$ betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit $v(x,y)$ dafür, daß unter den ersten n Würfen x Einsen, unter den letzten n Würfen y Einsen sind, ist dann mit der Bezeichnung (10) ersichtlich gegeben durch:

$$v(x,y) = \sum_{z=0}^{m} w_m(z)\, w_{n-m}(x-z)\, w_{n-m}(y-z) \begin{pmatrix} x = 0, 1, \ldots n \\ y = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Zunächst verifiziert man die (12) entsprechenden Beziehungen.

$$v_1(x) = w_n(x); \quad v_2(y) = w_n(y) \quad \ldots \ldots \quad (12').$$

Ferner zeigt (19), daß $v(x,y)$ symmetrisch ist. Wie in (13) findet sich

$$\left.\begin{aligned} a = b &= n\,q \\ M_{20} = M_{02} &= n\,p\,q \\ M_{11} &= m\,p\,q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (13''),$$

somit

$$r = \frac{m}{n} \quad \ldots \ldots \quad (14').$$

Dieses Resultat ist sehr plausibel.

Wir wollen nun $S = \sum_{x,y} \frac{v^2}{v_1 v_2}$ angeben. Es ergibt eine der der vorigen Nummer nachgebildete Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} S &= 1 + \frac{\binom{m}{1}^2}{\binom{n}{1}^2} + \frac{\binom{m}{2}^2}{\binom{n}{2}^2} + \ldots \frac{\binom{m}{m-1}^2}{\binom{n}{m-1}^2} + \frac{\binom{m}{m}^2}{\binom{n}{m}^2} \\ &= 1 + \left[\frac{m}{n}\right]^2 + \left[\frac{m(m-1)}{n(n-1)}\right]^2 + \ldots \left[\frac{m(m-1)\ldots 2}{n(n-1)\ldots(n-m+2)}\right]^2 + \left[\frac{m(m-1)\ldots 1}{n(n-1)\ldots(n-m+1)}\right]^2 \end{aligned}\right\} (20).$$

Für $m = n - 1$ folgt sogleich daraus (16). Es ist also

$$S = 1 + \sum_{z=1}^{m} \frac{\binom{m}{z}^2}{\binom{n}{z}^2}, \qquad f^2 = \frac{1}{n} \sum_{z=1}^{m} \frac{\binom{m}{z}^2}{\binom{n}{z}^2}, \qquad g^2 = \frac{(n+1)\,f^2}{1 + n\,f^2} \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Man sieht, daß für endliche m und unbegrenzt wachsendes n, f^2 wie $\frac{1}{n^3}$ gegen Null geht, also f wie $n^{-\frac{3}{2}}$ (während r wie n^{-1}). Wenn aber m mit n unbegrenzt wächst, so daß etwa $\nu = n - m$ festgehalten wird, so geht f^2 gegen bestimmte echte Brüche, die $\leq \frac{1}{3}$ sind, und zwar ist dann

$$\lim_{n \to \infty} f^2 = \frac{1}{2\nu + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22).$$

Das folgt aus (20), wenn man für $n - m = \nu$ schreibt, es ist nämlich

$$S = \left[\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}\right]^2 \cdot \{[1 \cdot 2 \ldots \nu]^2 + [2 \cdot 3 \ldots (\nu+1)]^2 + \ldots + [(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots n]^2\}.$$

Bildet man die Summe in der geschwungenen Klammer und ordnet nach fallenden Potenzen von n, so beginnt diese Summe mit $\frac{1}{2\nu+1} \cdot n^{2\nu+1}$, dann kommen Glieder niedrigerer Ordnung in n. Da der Faktor vor der geschwungenen Klammer von der Ordnung $n^{-2\nu}$ ist, und noch S, um f^2 zu erhalten, mit $\frac{1}{n}$ multipliziert wird, folgt (22). Dieses Ergebnis (22) ist sehr unanschaulich. — Hingegen verhält sich g^2 hier in der Größenordnung wie r^2. Beide gehen gegen 1, wenn n gegen ∞ geht und $n - m = \nu$ eine endliche konstante Differenz ist.

Betrachten wir zum Abschluß der Diskussion dieses einfachsten Modells ein Anwendungsbeispiel. Für ein von E. Czuber behandeltes Zahlenbeispiel, das den Zusammenhang zwischen Stengeldicke und Länge des längsten Blumenblattes der Pflanze Trientalis Europaea darstellt (bei einer Einteilung von $k = 11$ Klassen für jede der Variablen), finden sich in der „Wahrscheinlichkeitsrechnung" von R. v. Mises[4]) die empirischen aus den beobachteten relativen Häufigkeiten sich ergebenden Größen ϱ^2, φ^2 und Σ berechnet, die den theoretischen r^2, f^2 und S entsprechen. Und zwar ist, wenn wir noch die g^2 entsprechende Größe γ^2 hinzufügen:

$$\begin{array}{ll} \varrho = 0{,}83, & \varphi^2 = 0{,}26, \\ \varrho^2 = 0{,}69, & \gamma^2 = 0{,}79 \end{array} \quad \Sigma = 3{,}61\,.$$

Die starke Verschiedenheit zwischen ϱ^2 und φ^2 wird uns nach dem vorhergehenden nicht wundern. Suchen wir mit einem „Modellfall" zu vergleichen. Nehmen wir $n = 10$ und $m = 8$, so ist nach (14') $r = 0{,}8$. Für S ergibt sich dann

$$\frac{1}{10^2 \cdot 9^2}[(1 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + \ldots + (9 \cdot 10)^2] = \frac{1}{810}\left[\frac{1}{5} \cdot 10^4 - \frac{1}{3} \cdot 10^2 + \frac{2}{15}\right] \sim 2{,}4\,.$$

Dies ist kleiner als 3,62. Wir rechnen daher nochmal mit $n = 10$ und $m = 9$. Dann erhalten wir 3,85 für die analoge Größe. Das ist etwas größer als 3,62. Die Korrelation bei unserem Beispiel ist also eine ähnliche wie bei einem „Überdeckungsmodell", bei dem jeweils 10 Würfe ausgeführt werden und 8- bis 9 fache Überdeckung stattfindet, also jedenfalls eine recht enge (Abb. 1).

Abb. 1 — $n = 10, m = 8$

Abb. 1.

Wir haben hier der Anschaulichkeit halber $n = 10$ genommen, entsprechend der Klassenzahl $k = 11$, weil in unserem Überdeckungsmodell stets $k = (n + 1)$ war, da die $(n + 1)$ Werte $0, 1, \ldots n$ durchlaufen wurden. Diese Wahl von n hat den anschaulichen Vorteil, daß man das empirische Schema gewissermaßen mit einem Modell gleicher „Ausdehnung" vergleicht. Es wird aber gewiß nicht immer möglich sein, n von vornherein festzulegen und doch noch ungefähre Übereinstimmung von r und f^2 des Modells mit dem empirischen ϱ und φ^2 zu erzielen. Auch hier stimmte bei $m = 8$ das φ^2, bei $m = 9$ das ϱ nicht allzu gut mit den entsprechenden Modellgrößen. Und ist es überhaupt allgemein möglich — selbst wenn man n und m offen läßt —, einen beliebigen empirischen Fall durch ein Modell der betrachteten Art nachzubilden? Erwägungen dieser Richtung führen uns nun zu einer allgemeineren Fragestellung.

[4]) R. v. Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig-Wien 1931, S. 362.

4. Stellung der Aufgabe. Überlegungen der folgenden Art werden hier nahegelegt:

1. Es durchläuft ja r^2 die Werte von 0 bis 1 und ebenso f^2. Denken wir uns nun ein ganz beliebiges Paar solcher Werte, z. B. $r^2 = \frac{1}{2}$, $f^2 = \frac{3}{4}$, oder $r^2 = 0$, $f^2 = 1$ oder $r^2 = \frac{1}{\pi}$, $f^2 = 0$ usw. Ist es prinzipiell möglich, eine Verteilung anzugeben, bei der beliebig vorgegebene zwei Zahlen für r^2 und f^2 auftreten? Oder gibt es vielleicht gewisse Einschränkungen, die erfüllt sein müssen? Denken wir uns r^2 als Abszisse, f^2 als Ordinate eines rechtwinkligen cartesischen Achsenkreuzes, und betrachten wir das abgeschlossene Quadrat (0,0, .. 1,1). Ist jeder Punkt dieses Quadrates genau (oder mindestens mit entsprechender Annäherung) realisierbar?

2. Nach Beantwortung der in 1. gestellten Frage kann man weiter die Aufgabe stellen, eine Klasse hinlänglich allgemeiner Modelle anzugeben, die jeden realisierbaren „Punkt" des ($r^2 - f^2$)-Quadrates auch wirklich darstellen; d. h. zu einem beliebig vorgegebenen Wertepaar r_1^2, f_1^2 (welches nur den etwa durch 1. gegebenen Einschränkungen genügt) soll (mindestens) ein Modell der Klasse vorhanden sein, welches gerade diesen Fall nachbildet. Eine Forderung wird dabei sein, die gesuchte Klasse von Modellen womöglich auch nicht unnötig allgemein zu machen, insbesonders die zweiparametrige Mannigfaltigkeit r^2, f^2 auch auf eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit von Modellen abzubilden. (Zur Vereinfachung reden wir hier zunächst stets nur von r^2, nicht von r, das Vorzeichen läßt sich dann stets noch — eventuell durch triviale Koordinatentransformation — berücksichtigen.)

Zu 1. Ist zunächst zu sehen, daß aus $r^2 = 1$ stets $f^2 = 1$ folgt (nicht umgekehrt), daß also die rechte vertikale Kante des Quadrates ($r^2 = 1$, $f^2 < 1$) mit Ausnahme ihres obersten Punktes $r^2 = f^2 = 1$ sicher nicht realisierbar ist.

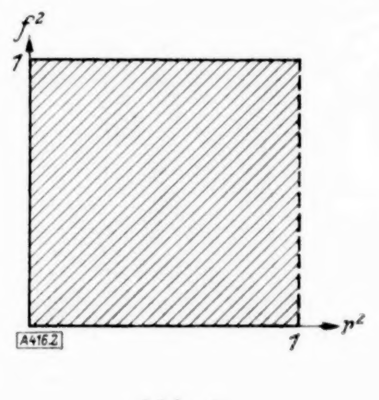


Abb. 2.

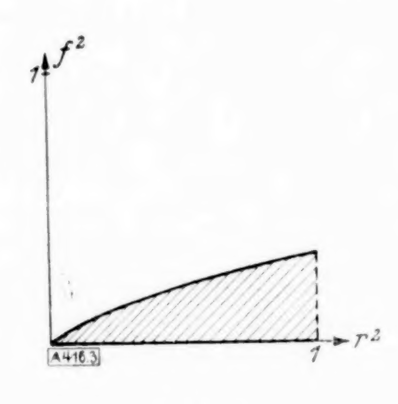


Abb. 3.

5. Untersuchung des Überdeckungsmodells von Abschn. 2 u. 3 nach obigen Gesichtspunkten. Wir wollen nun untersuchen, was von dem nun gewonnenen Standpunkt aus durch das in Abschn. **2** und **3** untersuchte Überdeckungsmodell geleistet wird. $r = \frac{m}{n}$ durchläuft alle (positiven, rationalen) Zahlen zwischen 0 und 1, dabei kann man bei vorgegebenem r noch entweder m oder n beliebig wählen. f^2 ist durch (21) gegeben. Der Wert $f^2 = 1$ wird nur für $m = n$ erreicht. Für $m = n$ ist aber stets auch $r^2 = 1$. Sei nun $m < n$, so wissen wir schon, daß für $m = n - 1$ im $\lim\limits_{n \to \infty}$ der Wert $f^2 = \frac{1}{3}$ der größte überhaupt erreichbare ist. Insbesondere ist bei $m = n - 1$

n	1	2	3	4	5	.....	∞
r^2	0	0,250	0,445	0,562	0,640	.....	1
f^2	0	0,125	0,185	0,219	0,240	.....	0,333

Größere Werte als die hier gegebenen können — abgesehen von dem isolierten Punkt $r^2 = f^2 = 1$ — bei jeweils gegebenem n überhaupt nicht angenommen werden. (Ist $m = n - \nu$, so ist der mögliche Maximalwert — bei festem ν statt $\frac{1}{3}$ nur $\frac{1}{2\nu + 1}$.) Außerdem aber ist bei vorgegebenem r es natürlich auch gar nicht möglich, stets $m = n - 1$ oder auch $m = n - \nu$ (bei festem ν) zu wählen. Es besitzt also bei vorgegebenem festen Quotienten $\frac{m}{n}$ f^2 für jedes $\frac{m}{n}$ einen jedenfalls unter $\frac{1}{3}$ gelegenen Maximalwert, der jeweils

für das kleinste mögliche m erreicht wird, während f^2 immer kleiner wird, je größer m und damit n $\left(\text{bei festem } \frac{m}{n}\right)$ gewählt wird. Ist z. B. $r = \frac{1}{2}$ vorgegeben, so ist für $m = 1$, $f^2 = \frac{1}{8}$; für hinlänglich großes m ist $f^2 = 0$ und für $m = 2, 3, 4, \ldots$ erhält man für f^2 Werte zwischen $\frac{1}{8}$ und 0. Ähnlich geht f^2 für $r = \frac{1}{3}$, von $\frac{1}{27}$ bis 0, usw. Ist etwa genau $r = 0{,}24$, also $r^2 = 0{,}058$ vorgegeben, so ist $\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$ und es ergibt sich für $m = 6$:

$$f^2 = \frac{1}{25}\left[\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{6 \cdot 5}{25 \cdot 24}\right)^2 + \left(\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{25 \cdot 24 \cdot 23}\right)^2 + \cdot + \cdot + \left(\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}\right)^2\right] = 0{,}002.$$

Nimmt man aber angenähert $m = 1$, $n = 4$ $\left(\frac{m}{n} = 0{,}25\right)$, so ist $f^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}0156$, also 6 bis 7 mal so groß. (Irrationale Zahlen können durch $\frac{m}{n}$ ja jedenfalls nur angenähert werden. Hier ist die Wahl eines „kleinsten" m also gewiß nicht zwangsläufig.)

Man sieht somit, daß es zwar möglich ist, gewisse einfache Fälle durch ein geeignetes Modell aus dieser Klasse der Überdeckungsmodelle zu veranschaulichen, daß aber doch höchstens ein kleiner Winkel des $r^2 - f^2$-Quadrates erreicht wird, wie es Abb. 3 andeutet. Immerhin ist für gewisse einfache Fälle der Korrelation dieses anschauliche Modell recht verwendbar.

Es ist nun nicht fernliegend, da dieses Modell doch große Vorteile bietet, zu versuchen, durch geringe Abänderung weitere Gebiete des in Rede stehenden Quadrates zu erfassen. Obwohl, wie wir gleich vorwegnehmen wollen, auf diese Art unser Ziel nicht erreicht wird, wollen wir doch kurz den Gedankengang andeuten, da ein ähnlicher später mit Erfolg angewendet werden wird.

Bekanntlich ist das Kontingenzmaß f^2 unempfindlich gegen Koordinatenänderung, gegen Verzifferung. Der Korrelationskoeffizient aber ändert sich dabei. Da es doch offenbar der Nachteil unseres Modells ist, daß zu großen r Werten nur kleine f^2 Werte gehören, suchen wir eine Verzifferung, die r verkleinern soll.

Verzifferung nach x^2. Wir behalten das gleiche Modell bei, doch mögen die Merkmale jetzt $0, 1, 4, 9, \ldots n^2$ sein. (Man kann sich das so vorstellen, daß je $(2n - m)$ Kopf-Wappen-Würfe gemacht werden. Ein Spieler setzt auf die Kopfanzahlen x in den ersten n Würfen, ein zweiter auf die Kopfanzahlen y in den letzten n Würfen. Der Gewinn beträgt jeweils x^2 bzw. y^2 Marken. Die Korrelation der Gewinne wird untersucht.) Es ändert sich f^2 nicht. Für das neue r' erhält man — jetzt nicht mehr unabhängig von p und q — nach einiger Rechnung:

$$r' = \frac{m}{n} \cdot \frac{[p + (2n - 1)q]^2 + m p q}{[p + (2n - 1)q]^2 + (2n - 2) p q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23),$$

für $p = 0$ oder $q = 0$ kommt $r' = r = \frac{m}{n}$, für dazwischenliegende p und q wird r' kleiner als $\frac{m}{n}$, doch ist der Effekt zu gering. — Auch eine Verzifferung nach $x^{(2)} = x(x-1)$ erreicht nicht den gewünschten Zweck. $\left(\text{Hier liegt } r' \text{ dann zwischen } \frac{m}{n} \text{ und } \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.\right)$ Weit wirksamer ist die additive Verzifferung.

Wir betrachten als neue Merkmale $0, 1, 2, \ldots (n-1), (n + X)$ für x und auch für y. Man kann sich das so vorstellen, daß im Falle alle n Würfe Kopfwürfe sind, nicht nur n Marken als Prämie gezahlt werden, sondern die Extraprämie von $(n + X)$ Marken. Hier ergibt sich für das neue $r'(X)$

$$r'(X) = \frac{m q (1 + 2 X q^{n-1}) + X^2 q^{2n-m} (1 + q + \ldots q^{m-1})}{n q (1 + 2 X q^{n-1}) + X^2 q^n (1 + q + \ldots q^{n-1})} \quad \ldots \ldots \quad (24),$$

für $q = 0$ und $q = 1$ wird auch hier $r'(X) = r = \frac{m}{n}$; für $m = n$, und nur dann, ist $r'(X) = 1$. Hier kann man nun, wie (24) zeigt, offenbar ganz unabhängig von den Werten m und n nur

durch Wahl von X und $q, r'(X)$ beliebig klein machen, indem man etwa erst X so groß wählt, daß es in (24) nur auf das mit X^2 multiplizierte Glied ankommt. Der Faktor von X^2 wird dann wegen $n > m$ mit q beliebig klein. Man erreicht damit, daß der Wert $f^2 = \frac{1}{3}$, der früher nur mit $r = 1$ gekoppelt auftreten konnte, jetzt schon bei beliebig kleinem $r'(X)$ angenommen werden kann. Es wird also im wesentlichen jetzt das in Abb. 4 angedeutete Rechteck durch das so variierte Modell erfaßt. Da das aber noch von dem Gewünschten entfernt ist, halten wir uns damit nicht länger auf, denn durch keine Verzifferung solcher Art können wir den Wert von $f^2 = \frac{1}{3}$ vergrößern.

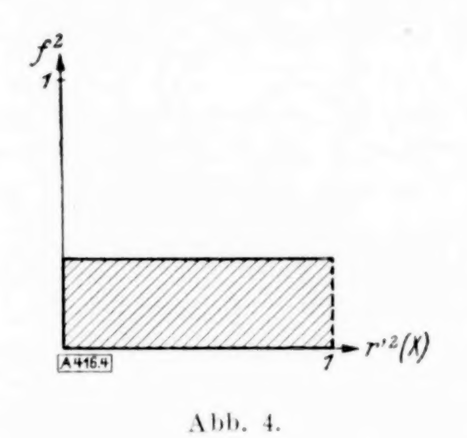


Abb. 4.

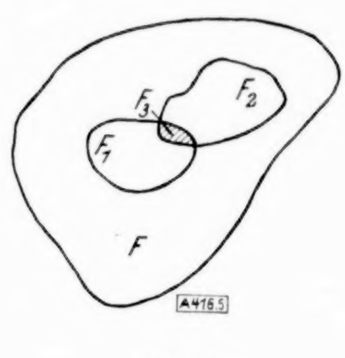


Abb. 5.

6. Stetiges Überdeckungsmodell. Wir betrachten nun folgendes Spiel (Abb. 5).

Man denke sich innerhalb eines einfachen Bereiches F der (x, y)-Ebene zwei einander überdeckende Bereiche F_1 und F_2 gelegen. Der dem F_1 und F_2 gemeinsame Bereich heiße F_3. Die Flächeninhalte von F_1, F_2, F_3, F werden jeweils mit den gleichen Buchstaben bezeichnet. Es wird nun der Wiederholungsvorgang betrachtet, der darin besteht, je n Schüsse auf die „Scheibe" F abzugeben (je n Kugeln nach F zu werfen), wobei die Voraussetzung gemacht wird, daß für alle Teile der Scheibe Gleichwahrscheinlichkeit besteht, derart, daß die Wahrscheinlichkeit, in das Gebiet F_1 zu treffen, gleich ist $\frac{F_1}{F} = \eta_1$, für F_2 gleich $\frac{F_2}{F} = \eta_2$, für F_3 gleich $\frac{F_3}{F} = s$, für das Restgebiet gleich $\frac{F - (F_1 + F_2 - F_3)}{F} = p$. Es ist somit $p + \eta_1 + \eta_2 - s = 1$. Im folgenden sei der Einfachheit halber $F_1 = F_2$ angenommen. Wir setzen noch $\frac{F_1 - F_3}{F} = \frac{F_2 - F_3}{F} = \eta_1 - s = \eta_2 - s = q$, dann gilt

$$2q + p + s = 1 \qquad (25).$$

Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit $v(x, y)$, daß x Schüsse nach F_1, y Schüsse nach F_2 treffen und insbesonders nach der Korrelation der Variablen. Während das Überdeckungsverhältnis im früheren Modell nur diskontinuierlich variieren konnte, ist jetzt die Überdeckung durch das kontinuierlich variable Stück F_3 bedingt

Man kann das „Spiel" auch folgendermaßen schildern. Gespielt wird Roulette von zwei Spielern A und B, es sind μ (z. B. $\mu = 36$) Nummern vorhanden. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der Nummern kommt, ist $\frac{1}{36}$. Der erste Spieler A setzt etwa auf die Nummern 1 bis 10, der zweite B, auf die Nummern 7 bis 16. Dann ist $\eta_1 = \frac{10}{36}$ die Wahrscheinlichkeit des A, $\eta_2 = \frac{10}{36}$ die des B einmal zu gewinnen; da die Nummern 7, 8, 9, 10 von beiden gesetzt sind, besteht eine Wahrscheinlichkeit $s = \frac{4}{36}$ dafür, daß sowohl A wie auch B bei $n = 1$ einmal gewinnen, für die Bank bleibt $p = \frac{20}{36}$; $\eta_1 - s = \eta_2 - s = q = \frac{6}{36}$ ist die Wahrscheinlichkeit des A, zu gewinnen, ohne daß B gewinnt, und ebenso groß ist die Wahrscheinlichkeit des B, allein zu gewinnen. Es ist $2q + p + s = 1$. Es wird n-mal gespielt und nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß der A x-mal, der B y-mal gewinnt. (Bei derartiger Formulierung muß man nur nachträglich dahin erweitern, daß die q, p, s beliebige Zahlen zwischen 0 und 1 sein dürfen, nicht nur ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{36}$.)

Schließlich ist die hier gestellte Aufgabe mit einem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohlbekannten theoretisch wichtigen Grundproblem identisch, nämlich mit der sogenannten n-fachen Summenbildung (n-facher Faltung) aus einer gewöhnlichen Doppelalternative, d. h. mit der zweidimensionalen Verallgemeinerung der eindimensionalen Bernoullischen Grundaufgabe, die durch die Bernoullische Verteilung $w_n(x)$ (10) gelöst wird. Im „Urnenschema" ausgedrückt: Eine Urne enthalte viererlei Lose (im eindimensionalen waren es zweierlei, nämlich solche mit 0 und mit 1), nämlich solche mit (0,0), mit (0,1) mit (1,0) und mit (1,1) in solcher Verteilung, daß die Wahrscheinlichkeiten, je eine der vier Sorten zu treffen, jeweils durch p, q, q, s gegeben sind mit $p+2q+s=1$. (Natürlich ist auch hier die Vereinfachung, daß (01) und (10) im gleichen Verhältnis verteilt sind, unwesentlich, aber bequem.) Es wird n-mal gezogen, man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der an erster Stelle stehenden Ziffern gleich x, die der an zweiter Stelle stehenden gleich y sei.

Die Antwort darauf erhält man (z. B. aus der Vorstellung der ersten Formulierung), wenn man bedenkt, daß auf F_1 gerade x, auf F_2 gerade y Treffer dann entfallen, wenn auf das gemeinsame Stück F_3 gerade z Treffer entfallen, und $(x-z)$ bzw. $(y-z)$ Treffer auf F_1 bzw. F_2, während $n-z-(x-z)-(y-z)=n-x-y+z$ Kugeln irgendwo außerhalb F_1 und F_2 in F landen. Dementsprechend ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\left.\begin{aligned} v(x,y) &= \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z}\binom{n}{x-z}\binom{n}{y-z} s^z q^{x-z} q^{y-z} p^{n-x-y+z} \\ &= \sum_{z=0}^{n} \frac{n!}{z!\,(x-z)!\,(y-z)!\,(n-x-y+z)!} s^z q^{x+y-2z} p^{n-x-y+z} \\ & \qquad\qquad (x=0,1,\ldots n;\ y=0,1,\ldots n) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (26).$$

Es ist eine symmetrische arithmetische Verteilung, von der das ganze Quadrat der „Seitenlänge" $(n+1)$ erfüllt wird.

Ein wichtiger Spezialfall, der der sogenannten „Aufteilungswahrscheinlichkeit" oder zweidimensionalen Bernoullischen Verteilung, ergibt sich für $s=0, p+2q=1$. Dann wird aus (26)

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \binom{n}{x}\binom{n-x}{y} q^{x+y} p^{n-x-y} \\ &= \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!} q^{x+y} p^{n-x-y} \qquad (x=0,1\ldots n;\ y=0,1\ldots n) \quad . \; . \; . \; . \quad (27). \end{aligned}$$

Als Überdeckungsmodell aufgefaßt heißt $s=0$, daß keine Überdeckung stattfindet. Trotzdem besteht eine Korrelation, nämlich zufolge der konstanten Summe n, denn wenn z. B. von den im ganzen n Schüssen x in den einen Bereich F_1 gefallen sind, so können höchstens $(n-x)$ nach F_2 fallen.

Die Korrelation in (26) ist gewissermaßen von zwei Umständen bedingt, von der konstanten Summe und von der Überdeckung, während in (27) nur die konstante Summe, in (19) nur die Überdeckung eine Rolle spielen. Aus (27) sieht man, daß nur links von der Diagonale $(x+y=n)$ des Quadrates von 0 verschiedene Wahrscheinlichkeiten $v(x,y)$ stehen, z. B. für $n=3$, $k=4$ sieht diese Verteilung so aus:

3	q^3	0	0	0
2	$3pq^2$	$3q^3$	0	0
1	$3p^2q$	$6q^2p$	$3q^3$	0
0	p^3	$3p^2q$	$3pq^2$	q^3
	0	1	2	3

7. Die Korrelationsgrößen für den Spezialfall (27) und für den allgemeinen Fall (26). Aus der Auffassung unserer Verteilung als Resultat der Summenbildung ergibt sich, daß die Mittelwerte a, b und Streuungen M_{20}, M_{02}, M_{11} durch Multiplikation mit n aus den entsprechenden a', b', M'_{20} usf. der Grundverteilung hervorgehen. Es ist für den Spezialfall (27):

$$a' = b' = 0\,[v(0,0) + v(0,1)] + 1\,v(1,0) = q$$

$$M'_{20} = M'_{02} = (0-q)^2\,[v(0,0) + v(0,1)] + (1-q)^2\,v(1,0) = q\,(p+q)$$

$$M'_{11} = (0-q)^2\,v(0,0) + 2\cdot(0-q)\,(1-q)\,v(1,0) = -q^2,$$

also

$$a = b = n\,q; \quad M_{20} = M_{02} = n\,q\,(p+q); \quad M_{11} = -n\,q^2 \quad \ldots\ldots \quad (28),$$

somit

$$r = -\frac{q}{p+q} = -\frac{q}{1-q} \quad \ldots\ldots \quad (29).$$

Bemerkenswert ist für r die Unabhängigkeit von n. Für $q = 0$ wird $r = 0$, die Verteilung zerfällt hier in ein Produkt, jeder der Faktoren $v_1(x)$ und $v_2(y)$ hat die Gestalt $v_1(0) = 1$, $v_1(1) = v_1(2) = \ldots = v_1(n) = 0$. Für $q = \frac{1}{2}$ wird $r = -1$, alle von Null verschiedenen Elemente $v(x, y)$ liegen auf der Diagonale. Ein empirisches Material mit negativem ϱ kann man gut mit diesem Modell vergleichen.

Für das Kontingenzmaß ergibt eine etwas langwierige Rechnung:

$$S = \frac{\left(\frac{q}{1-q}\right)^{2n-2} - 1}{\left(\frac{q}{1-q}\right)^2 - 1} = \frac{r^{2n+2} - 1}{r^2 - 1},$$

und daraus:

$$f^2 = \frac{r^2}{n}\,\frac{1-r^{2n}}{1-r^2}; \quad g^2 = \frac{n+1}{n}\,r^2\,\frac{1-r^{2n}}{1-r^{2n+2}} \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

Bemerkenswert ist hier, daß f^2 (und g^2) eine Funktion von r^2 ist, allerdings auch Funktion von n. Die weitere Überlegung knüpfen wir an den allgemeinen Fall der Verteilung (26) an.

Zunächst geben wir z. B. für $n = 3$ das Schema von (26) an:

3	q^3	$3\,q^2\,s$	$3\,s^2\,q$	s^3
2	$3\,q^2\,p$	$3\,q^3 + 6\,p\,q\,s$	$6\,q^2\,s + 3\,s^2\,p$	$3\,s^2\,q$
1	$3\,p^2\,q$	$6\,q^2\,p + 3\,p^2\,s$	$3\,q^3 + 6\,p\,q\,s$	$3\,q^2\,s$
0	p^3	$3\,p^2\,q$	$3\,q^2\,p$	q^3
	0	1	2	3

Für die Zeilen- und Spaltensummen finden wir analog zu (12):

$$v_1(x) = v_2(x) = \binom{n}{x}(q+s)^x\,(q+p)^{n-x} \quad \ldots\ldots \quad (31).$$

Für die Momente und für r analog (28):

$$a = b = n\,(q+s); \quad M_{20} = M_{02} = n\,(q+p)\,(q+s); \quad M_{11} = n\,(s\,p - q^2) \quad \ldots \quad (32).$$

$$r = \frac{s\,p - q^2}{(q+p)\,(q+s)} \quad \ldots\ldots \quad (33),$$

unabhängig von n. r kann also verschwinden, ohne daß q und s oder p verschwinden. Es ist $r = 0$ für $q^2 = p\,s$; es ist $r = 1$ für $q = 0$; $r = -1$, wenn $s = p = 0$.

Nun das Kontingenzmaß. Wir hatten in der vorigen Nummer gefunden, daß f^2 aus r^2 und n in einfacher Weise gerechnet werden kann. Versucht man hier die gleiche Vermutung, so läßt sich diese verifizieren und man erhält für S eine geometrische Reihe von $(n+1)$ Gliedern mit dem Anfangsglied 1 und dem Quotienten r^2 aus (33), also

$$S = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2}; \quad f^2 = \frac{r^2}{n}\frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2}; \quad g^2 = \frac{n+1}{n} r^2 \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^{2n+2}} \quad \ldots \ldots (34).$$

Für $r^2 = 1$ wird auch $f^2 = 1$ und $g^2 = 1$, für $r^2 = 0$ ist $f^2 = 0$ und $g^2 = 0$. Für $r^2 < 1$ geht f^2 mit $n \to \infty$ gegen 0, hingegen geht g^2 mit $n \to \infty$ gegen r^2. Es fragt sich nun, ob die durch (33) und (34) gegebenen Beziehungen, die in Abschn. **4** formulierte Aufgabe 2 lösen.

8. Diskussion der obigen Maße. Zunächst betrachten wir das Verschwinden von r. Ist $q^2 = s\,p$, so hängt r, da ja stets $2q + s + p = 1$ nur mehr von einem Parameter ab, eliminiert man p, so gilt zwischen q und s die Beziehung $(q+s)^2 = s$. Ist dies erfüllt, so zerfällt (26) in das Produkt zweier Funktionen

$$v_1(x) \cdot v_2(y) = \binom{n}{x}(q+s)^x \left(\frac{q}{q+s}\right)^{n-x} \cdot \binom{n}{y}(q+s)^y \left(\frac{q}{q+s}\right)^{n-y} \quad \ldots \ldots (26').$$

Da wegen $q^2 = p\,s$ jetzt $\frac{q}{q+s} = q + p$ ist, so herrscht Übereinstimmung mit (31). Die beiden Faktoren haben natürlich anschauliche Bedeutung. Setzen wir $q + s = \eta$, so ist ja

$$v_1(x) = v_2(x) = \binom{n}{x} \eta^x (1 - \eta)^{n-x}$$

schlechthin die Wahrscheinlichkeit dafür, in n Zügen x Schüsse in der Fläche F_1 zu landen (denn die Wahrscheinlichkeit, einen Schuß dort zu landen, ist η). Im Falle der Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit, x Schüsse in F_1, y Schüsse in F_2 zu landen, tatsächlich gleich dem obigen Produkt $v_1(x) \cdot v_2(y)$.

Weniger einfach ist, sich diesen Fall anschaulich vorzustellen, denn es liegt tatsächlich an den speziellen Zahlen. Ist z. B., um den allereinfachsten Fall zu nehmen, $p = q = s = \frac{1}{4}$ und $n = 1$, so ist z. B. die Wahrscheinlichkeit $v_1(1)$, einen Schuß in F_1 zu landen, gleich $q + s = \frac{1}{2}$, die $v_2(1)$, einen Schuß in F_2 zu landen, ebenso groß, das Produkt beider ist $v(1.1) = v_1(1) \cdot v_2(1) = (q+s)^2 = \frac{1}{4}$. Andererseits kann bei $n = 1$ je ein Schuß nach F_1 und nach F_2 nur dann fallen, wenn er in das gemeinsame Gebiet fällt. Die Wahrscheinlichkeit dafür aber ist $s = \frac{1}{4}$, also $v(1,1) = \frac{1}{4}$. Ähnlich ist etwa bei $n = 2$ und $v(2,0)$:

$$v(2,0) = v_1(2) \cdot v_2(0) = (s+q)^2 (1 - s - q)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

aber auch:
$$v(2,0) = \frac{2!}{2!\,0!\,0!} q^2 s^0 q^0 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Bei größerem n, wo mehrere Möglichkeiten des Zustandekommens eines Ergebnisses bestehen, ist das Zerfallen noch weniger anschaulich und man wird sich an die Formeln halten. Sei z. B. $n = 5$, $x = 4$, $y = 3$. Dieses Resultat kann offenbar auf zwei Arten zustande kommen, indem in das gemeinsame Gebiet F_3: 2 Kugeln fallen, 2 in den Rest von F_1 und 1 in den Rest von F_2, oder indem nach F_3: 3 Kugeln fallen, 1 in den Rest von F_1, 0 in den Rest von F_2 und eine ganz heraus in das Restgebiet von F. Die Wahrscheinlichkeit $v(4,3)$ ist dann, wenn $q^2 = s\,p$:

$$v(4,3) = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} s^2 q^3 + \frac{5!}{3!\,1!\,1!} s^3 q\,p = 50\, s^2 q^3,$$

andererseits ist

$$v_1(4) \cdot v_2(3) = \binom{5}{4}(s+q)^4 (p+q) \cdot \binom{5}{3}(s+q)^3 (p+q)^2$$

$$= \binom{5}{4}\binom{5}{3}(s+q)^7 \left(\frac{q}{s+q}\right)^3 = \binom{5}{4}\binom{5}{3} q^3 (s+q)^4 = 50\, q^3 s^2.$$

Da (33) wegen (25) nur von 2 Parametern abhängt, so setzen wir nun zur näheren Diskussion des allgemeinen Falls

$$s = \xi, \quad q + s = \eta, \quad \text{also } q = \eta - \xi, \quad p = 1 - 2\eta + \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

dann wird

$$r = \frac{\xi - \eta^2}{\eta(1-\eta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33').$$

Dies interpretieren wir in einer cartesischen $\xi - \eta$-Ebene. Da alle Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 liegen, q sogar nur zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, so bestehen die Ungleichungen:

$$0 \leq \xi \leq 1; \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}; \quad \xi \leq \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Danach ist (vgl. Abb. 6) das in Frage kommende Gebiet ein Dreieck, begrenzt von der Vertikalen $\eta = 0$, der 45°-Linie $\eta = \xi$ und der Horizontalen $\eta = \frac{1}{2}$. Innerhalb dieses Dreiecks verläuft die Parabel $\xi = \eta^2$, sie teilt das Dreieck in zwei Gebiete, in dem unteren (rechten) ist $r \geq 0$, in dem (linken) oberen $r \leq 0$. Auf der Parabel ist $r = 0$, auf der Geraden $\eta = \xi$, und nur auf ihr ist $r = +1$. Der Punkt $\xi = \eta = 0$ ist singulär, hier hängt r von der Art des Grenzüberganges ab. Die Gerade $\xi = 0$ bezeichnet den Spezialfall „ohne Überdeckung": $r = -\frac{\eta}{1-\eta}$, da geht r bei von 0 bis $\frac{1}{2}$ wachsendem η von 0 bis -1. Auf der Geraden $\eta = \frac{1}{2}$ (d. h. $s = p$) ist $r = 4\xi - 1$, hier ist für $\xi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ jeweils $r = -1, 0, +1$.

Anschaulich bedeutet $\xi = \frac{1}{2}$, d. h. $s = p = \frac{1}{2}$, $q = 0$ die funktionale Abhängigkeit zufolge voller Überdeckung; $\xi = 0$, d. h. $s = p = 0$, $q = \frac{1}{2}$ ist der Fall funktionaler Abhängigkeit zufolge der konstanten Summe n. In der Mitte für $\xi = \frac{1}{4}$ wird die Parabel $\xi = \eta^2$ geschnitten, da heben die beiden Abhängigkeiten einander gewissermaßen auf.

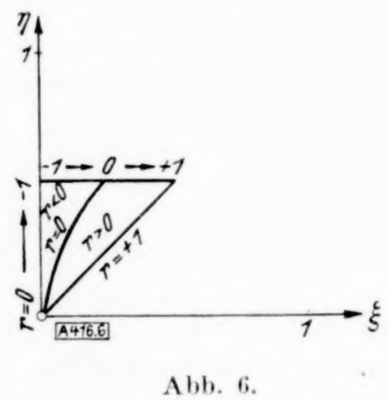


Abb. 6.

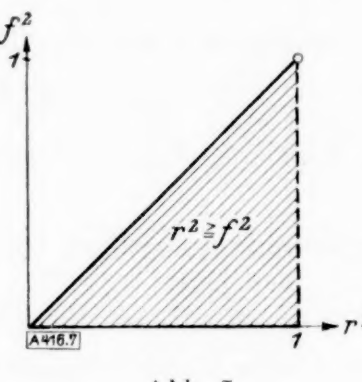


Abb. 7.

Nun betrachten wir schließlich r^2 und f^2 zusammen. Setzen wir $r^2 = a$, so ist

$$f^2 = \frac{a}{n} \frac{1-a^n}{1-a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Zunächst sieht man, daß stets

$$f^2 \leq a \quad . \quad (37);$$

denn da $a \leq 1$, ist $1 + a + \ldots a^{n-1} \leq n$. Es wird also sicher höchstens die eine Hälfte des $r^2 - f^2$-Quadrates (0,0, ... 1,1) realisiert. Für $n = 1$ wird $f^2 = a$, für $n = 2$, $f^2 = a\frac{1+a}{2}$; $n = 3$, $f^2 = a\frac{1+a+a^2}{3}$ usf. Es wird also f^2 immer kleiner bis Null für $n \to \infty$. Dabei bilden die so angenommenen Werte von f^2 keine stetige Mannigfaltigkeit, sondern eine diskrete, sie schreiten aber in praktisch hinlänglich kleinen Abständen von a bis 0 vor. Z. B. für $a = \frac{1}{2}$, bzw. $a = 0{,}9$ erhält man sukzessive für $n = 1, 2, \ldots$

für $a = \frac{1}{2}$; $f^2 = 0{,}50$; $0{,}375$; $0{,}29$; $0{,}24$; $0{,}19$, ...

für $a = 0{,}9$; $f^2 = 0{,}90$; $0{,}86$; $0{,}81$; $0{,}77$; $0{,}74$, ...

Für die praktische Identifizierung eines konkreten empirischen Falles ϱ, φ^2 mit einem Modellfall genügt das, da es für die Vorstellung ja hinreicht, z. B. anzugeben, „n zwischen 3 und 4“ oder dgl. Würde man die Aufgabe so abändern, daß man n als kontinuierlich Veränderliche betrachten könnte, so wäre auch f^2 einer beliebig feinen Skala fähig. Nur für $a = 1$ ist natürlich auch hier auch bei beliebig großen n stets $f^2 = 1$.

Man sieht schließlich leicht, daß auch durch q^2 und a keinesfalls das ganze $(0, 0, \ldots 1, 1)$ Quadrat realisiert würde.

Man hat hier eine Abbildung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit s, q, n auf die zweidimensionale r^2, f^2. Es genügt aber auch, den S. 31 erwähnten Spezialfall $s = p$ zu nehmen, dann ist $2s + q = 1$, und r durchläuft dabei, wie oben diskutiert, doch noch alle Werte zwischen -1 und 1, und zwar die Werte von 0 bis 1 für $q = \frac{1}{4}$ bis $q = 0$; die von 0 bis -1 für $q = \frac{1}{4}$ bis $q = \frac{1}{2}$. Durch die Beziehungen (33), (34), welch erstere die einfache Form $r = 1 - 4q$ erhält, ist dann eine Abbildung der zweidimensionalen (q, n) Mannigfaltigkeit auf die zweidimensionale (r^2, f^2) Mannigfaltigkeit vermittelt. Wenn q die Werte von 0 bis $\frac{1}{4}$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{4} \text{ bis } \frac{1}{2}\right)$ und n die ganzzahligen Werte von 0 bis $+\infty$ durchläuft, bilden die zugehörigen Punkte (r^2, f^2) ein Gitter, das in horizontaler Richtung das Dreieck der Abb. 7 beliebig dicht erfüllt, während in vertikaler Richtung die Punkte in endlichen festen Abständen, die praktisch hinlänglich dicht sind, nebeneinander liegen. Die Gerade $r^2 = 1$ wird nicht realisiert, mit Ausnahme des Punktes $f^2 = 1$. Das Vorzeichen von r kann berücksichtigt werden.

Als Zahlenbeispiel wählen wir wieder das von S. 24 mit $\varrho^2 = 0{,}69$; $\varphi^2 = 0{,}26$. Man erhält aus (34), daß mit den gegebenen $\varrho^2 - \varphi^2$-Werten $n \sim 8$. Weiter folgt für $s = p$ aus $r = 4s - 1$, also $s = \frac{1{,}83}{4} = 0{,}46$, daß $q = 0{,}04$, $p = 0{,}46$.

Die Korrelation ist also in diesem Beispiel eine solche, wie sie besteht, wenn F_1 und F_2 je 50% der ganzen Fläche F ausmachen. Das F_1 und F_2 gemeinsame Gebiet F_3 beträgt 46%, das Restgebiet von F außerhalb F_1 und F_2 auch 46%, im ganzen werden $n = 8$ Kugeln geworfen. — Oder: Es wird eine Roulette gespielt mit 50 Nummern, der eine setzt auf die Nummern 1 bis 25, der zweite auf die Nummern 3 bis 27, die Nummern 28 bis 50 sind für die Bank. Es werden 8 Nummern gezogen und die Wahrscheinlichkeit betrachtet, daß der erste bzw. der zweite Spieler x- bzw. y-mal gewinnt ($0 \leqq x \leqq 8$; $0 \leqq y \leqq 8$). So wie bei diesem Spiel verhalten sich in unserem Beispiel die Korrelationsverhältnisse.

9. Verallgemeinerung des Modells. Das obige Modell ist also verwendbar, wenn $r^2 \geqq f^2$. Nun muß noch der Fall $r^2 \leqq f^2$, d. h. die andere Hälfte des Quadrates geeignet realisiert werden. Zu dem Zweck ziehen wir wieder den Gedanken der Verzifferung heran, bei der ja, wie wir wissen, f^2 ungeändert bleibt, während r sich ändert. Unser Ziel ist, bei festem f^2, r entsprechend zu verkleinern. Und zwar wählen wir die schon in **5** betrachtete additive Verzifferung, bei der für die x Koordinaten statt $0, 1, \ldots n$ jetzt $0, 1, \ldots (n + X)$ tritt, für die y Koordinaten auch $0, 1, \ldots (n + X)$ oder evtl. auch $0, -1, \ldots -(n + X)$. Die Deutung des Zusatzes X, den es genügt, als positive Variable anzunehmen, als „Extraprämie“ bei „alle n“ wurde bereits berührt. Wir kommen aber darauf noch zurück. Jetzt untersuchen wir die resultierenden Formeln. Es ist leicht, die veränderten Momente zu rechnen. Man sieht:

a vergrößert sich um $X(q+s)^n$

b „ „ „ $\pm X(q+s)^n$

M_{20}^0 „ „ „ $(2nX + X^2)(q+s)^n$

M_{02}^0 „ „ „ $(2nX + X^2)(q+s)^n$

M_{11}^0 „ „ „ $\pm ns \cdot 2X \; (q+s)^{n-1} \pm s^n X^2$.

Man erhält für den neuen Korrelationskoeffizienten, den wir $r'(X)$ nennen, mit $r'(0) = r$

$$r'(X) = \pm r \cdot \frac{1 + 2X(q+s)^{n-1} + \dfrac{X^2}{n}\left[s^{n-1} + s^{n-2}(q+s)^2 + \ldots .(q+s)^{2n-2}\right]}{1 + 2X(q+s)^{n-1} + \dfrac{X^2}{n}(q+s)^{n-1}\left[1 + (q+s) + \ldots + (q+s)^{n-1}\right]} \quad . \quad (38),$$

$r'(X)$ hängt von 4 Parametern n, X, q, s ab. Wir machen zunächst wieder die Spezialisierung $s = p$, d. h. $s + q = \frac{1}{2}$ und ziehen die geometrischen Reihen zusammen:

$$r'(X) = \pm r \frac{1 + \frac{X}{2^{n-2}} + \frac{X^2}{n} \frac{s^n - (1/4)^n}{s - 1/4}}{1 + \frac{X}{2^{n-2}} + \frac{X^2}{n \cdot 2^{n-2}} (1 - (1/2)^n)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39).$$

Oder wenn man an Stelle von s mittels $r = 4s - 1$, $s = \frac{1+r}{4}$ jetzt r als Parameter einführt,

$$r'(X) = \pm r \frac{2^{n-2} + X + \frac{X^2}{n r \cdot 2^n} [(1+r)^n - 1]}{2^{n-2} + X + \frac{X^2}{n \cdot 2^n} [2^n - 1]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39').$$

Hierin tritt wie oben

$$f^2 = \frac{r^2}{n} \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Hier wird durch (39'), (34) die dreidimensionale Mannigfaltigkeit (r, X, n) auf die zweidimensionale $(r'(X), f^2)$ abgebildet.

Nehmen wir zunächst in (39') den Parameter $r \geqq 0$, so erhalten wir neben (34) für den Spezialwert $X = \infty$

$$r'(\infty) = \pm \frac{(1+r)^n - 1}{2^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

durch (34) und (40) ist eine Abbildung der (r, n)-Mannigfaltigkeit auf die $(r'(\infty), f^2)$-Mannigfaltigkeit vermittelt; diese Abbildung ist aber nicht allgemein genug, denn z. B. der Wert $r' = 0$ wird nur erreicht für $r = 0$; für $r = 0$ ist aber auch $f^2 = 0$. Und es würden so die Punkte $r' = 0$, $0 < f^2 \leqq 1$ sämtlich nicht angenommen (und auch nicht angenähert). Man weiß aber durch einfache Beispiele, daß diese linke Vertikalseite des $(r^2 - f^2)$-Quadrates in Gegensatz zur rechten Vertikalseite realisiert werden k a n n. Z. B. ist für die in $x = 0, 1, 2$; $y = 0, 1, 2$; definierte Verteilung mit:

$v(0,0) = \frac{1}{9}$, $v(1,2) = v(2,1) = \frac{4}{9}$, alle anderen $v(x, y)$ gleich 0, wie man sofort ausrechnet, $r = 0$, $f^2 = 1$. Ähnlich steht es mit $r = 0$ und $f^2 < 1$. — Nimmt man $r > 0$ und $X \neq \infty$, so wird r' ja noch weniger verkleinert als bei $X = \infty$; das ist also nicht geeignet.

Nehmen wir nun den Parameter $r \leqq 0$.

$$r = -R \qquad (R \geqq 0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41),$$

so erhalten wir, wie wir gleich zeigen werden, d a s g e w ü n s c h t e M o d e l l für das Dreieck $r'^2(X) \leqq f^2$ und außerdem nochmals ein Modell für das bereits erledigte Dreieck $r'^2(X) \geqq f^2$. Dann folgt nämlich mit (41)

$$r'(X) = \mp R \frac{1 + \frac{X}{2^{n-2}} + \frac{X^2}{n \cdot 4^{n-1}} \frac{1 - (1-R)^n}{R}}{1 + \frac{X}{2^{n-2}} + \frac{X^2}{n \cdot 4^{n-1}} (2^n - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39'').$$

Das obere Vorzeichen entspricht dabei der Verzifferung $0, 1, \ldots (n + X)$ in den Abszissen, $0, 1, \ldots (n + X)$ in den Ordinaten, das untere der Verzifferung $0, 1, \ldots (n + X)$ in den Abszissen, $0, -1, \ldots -(n + X)$ in den Ordinaten. Dazu tritt

$$f^2 = \frac{R^2}{n} \frac{1 - R^{2n}}{1 - R^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34').$$

Setzen wir hier in (39'') $X = \infty$, so ist

$$r'(\infty) = r' = \mp \frac{1 - (1-R)^n}{2^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

Man kann sich überlegen, daß die speziellen Beziehungen (42), (34') der (R, n) auf die (r', f^2)-Mannigfaltigkeit unseren Zwecken auch noch nicht genügen.

Hingegen e r r e i c h t man das Gewünschte mit (39''), (34') und es wird sich zeigen, daß man dabei noch n (unter Beachtung einer Ungleichung) frei wählen darf, so daß sich dann die

(R, X) auf die $(r'(X), f^2)$ abbilden. Soll auch ein Vorzeichen von $r'(X)$ dargestellt werden, so wählt man, um ein positives zu erreichen, die negative Verzifferung in den Ordinaten; um ein negatives $r'(X)$ darzustellen, die positive. (Die anschauliche Interpretation dieser „Spiele" folgt am Schluß von Abschn. **10.**) In den nun folgenden Überlegungen betrachten wir, um die Ideen zu fixieren, ein $r'(X) \geqq 0$, d. h. man muß an die negative Verzifferung denken, dann gilt rechts in (39″) das +-Zeichen.

Aus (42) folgt

$$r'(\infty) \leqq \frac{1}{2^n - 1} \quad \ldots \quad (42').$$

Auch das Maximum von $r'(\infty)$ wird jetzt also mit $n \to \infty$ beliebig klein, während in (40) das Maximum gleich 1 war.

10. Diskussion der Beziehungen (39″), (34′). Es sei $r'^2(X) \leqq f^2$, also es werde die bisher n **8.** nicht realisierte Hälfte des Grundquadrates betrachtet. Der Deutlichkeit halber nennen wir die (empirisch) vorgegebenen, zu realisierenden Größen ϱ' und φ^2. Wir wählen n ganz beliebig, nur so, daß

$$\frac{1}{2^n - 1} < \varrho' \quad \ldots \quad (43),$$

d. h. nach (42′)

$$r'(\infty) < \varrho' \quad \ldots \quad (44).$$

Mit dem gewählten n und dem gegebenen φ^2 bestimmt man aus (34′) ein R^2, so daß also

$$\varphi^2 = \frac{R^2}{n} \frac{1 - R^{2n}}{1 - R^2},$$

dann ist (vgl. Abschn. **8**)

$$R^2 \geqq \varphi^2$$

und da andererseits nach Voraussetzung

$$\varphi^2 \geqq \varrho'^2,$$

so ist

$$R^2 \geqq \varrho'^2; \quad R \geqq \varrho'.$$

Da nun nach (39″) $R = r'(0)$, so gilt

$$r'(0) \geqq \varrho' \quad \ldots \quad (45).$$

Aus (44), (45) und der Stetigkeit von $r'(X)$ nach X folgt, daß es ein X gibt, für das $r'(X) = \varrho'$. Damit ist gezeigt, daß bei $\varrho'^2 \leqq \varphi^2$ die (ϱ', φ^2) auf die (R, X) abgebildet werden, wenn nur für n (43) beachtet wird.

Für $\varrho' = 0$ $(n > 0)$ läßt sich (43) nicht erfüllen. Ist $\varrho' = 0$ und $\varphi^2 = 1$, so setzen wir in (42) $R = 1$, dann folgt aus (34′), daß die rechte Seite für jedes n gerade 1 ergibt, auch im limes für $n \to \infty$, für $n = \infty$ und $X = \infty$ folgt aber aus (42) $r' = 0$. Also $n = \infty$, $X = \infty$, $R = 1$ liefert den Punkt $\varrho' = 0$, $\varphi^2 = 1$. Ist nun $\varrho' = 0$ und φ^2 zwischen 0 und 1 vorgegeben, so bestimmen wir zu einem beliebig kleinen ε ein hinlänglich großes, aber endliches n so, daß $\frac{1}{2^n - 1} < \varepsilon$, zu diesem n und dem gegebenen φ^2 gibt es aus (34′) ein $R < 1$. So kann man dem gegebenen Punkt beliebig nahekommen, denn das mit diesem R und $X = \infty$ gerechnete R' ist kleiner als $\frac{1}{2^n - 1}$, also kleiner als ε.

Zahlenbeispiele. 1. $\varrho' = 0{,}1$; $\varphi^2 = 1$, hier muß $n \geqq 4$ sein. $R = 1$, dann folgt mit $n = 4$ aus

$$\frac{1 + \frac{X}{4} + \frac{X^2}{16^2}}{1 + \frac{X}{4} + \frac{15\,X^2}{16^2}} = 0{,}1.$$

$X_1 = 119{,}07$; $X_2 = -3{,}87$. Da wir nur positive X benutzen, haben wir in $R = 1$, $n = 4$, $X = 119{,}07$ passende Parameter für $\varrho' = 0{,}1$, $\varphi^2 = 1$.

2. $\varphi^2 = 0{,}9$; $\varrho' = 0{,}63$.

Aus (43) folgt hier $n \geqq 2$. Aus

$$0{,}9 = \frac{R^2}{2} \frac{1 - R^4}{1 - R^2}$$

folgt $R^2 \sim 0{,}933$ also $R \sim 0{,}966$.

Wir rechnen nun versuchsweise

$$0{,}966 \frac{1 + X + \frac{X^2}{8} \frac{1 - 0{,}034^2}{0{,}966}}{1 + X + \frac{3\,X^2}{8}}$$

für verschiedene X. Für $X=1$ ist die Verkleinerung von 0,966 zu schwach. Für $X=3$ folgt

$$0{,}966 \frac{4 + \frac{9}{8}\,1{,}035}{4 + \frac{27}{8}} \sim 0{,}68\,.$$

Für $X=4$ folgt etwa 0,62. Es wird also mit $n=2$, $R=0{,}96$, $X \sim 4$ das vorgegebene $\varphi^2=0{,}9$; $\varrho'=0{,}63$ realisiert.

Die Formeln (39″) und (34′) lösen aber auch die gestellte Aufgabe für das bereits in **8**. betrachtete Dreieck $\varrho'^2 \geqq \varphi^2$. Der Vorteil dieses an sich ja komplizierteren Modells ist hier, daß die stetige Variable X als Parameter auftritt, also nicht nur ein Gitter geliefert wird.

Sei also $\varrho'^2 \geqq \varphi^2$ vorgegeben. Wir wählen n so, daß es einerseits wieder (43) genügt, andererseits so groß, daß

$$\frac{\varrho'^2}{n} \frac{1-\varrho'^{2n}}{1-\varrho'^2} \leqq \varphi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46).$$

Das ist stets möglich, weil ja für hinlänglich großes n die linke Seite von (46) beliebig klein wird. (Für $\varphi^2=0$ wird $n=\infty$ gewählt.) Mit diesem n und dem gegebenen φ^2 rechnet man aus (34′) ein R^2. Dies liefert ein $R \geqq \varrho'$, wegen (46). Es ist also

$$R = r'(0) \geqq \varrho' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

und nach (43)

$$r'(\infty) < \varrho' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44),$$

aus beiden Ungleichungen folgt wie oben, daß für geeignetes X: $r'(X)=\varrho'$. Für $\varphi^2=0$, $\varrho'^2<1$, das ist die untere Horizontale unseres (0,0, … 1,1)-Quadrates, wählt man $X=0$, $R=\varrho'$, $n=\infty$ das gibt wegen $R<1$, $\varphi^2=0$ und $r'(0)=R=\varrho'$.

Als Beispiel sei wie in **3** . . .

$\varrho'=0{,}83$, $\varphi^2=0{,}26$ gewählt, früher hatten wir gerechnet, daß das Gleichheitszeichen in (46) für $n=8$ erfüllt ist. Wir wählen nun z. B. $n=16$. Die Bedingung (43) ist erfüllt. Man findet zu $\varphi^2=0{,}26$ und $n=16$: $R^2=0{,}81$, $R=0{,}90$.

Rechnet man die rechte Seite von (39″), so sieht man, daß $X=100$ zu klein, $X=1000$ zu groß ist. Für $X=150$ folgt mit $n=16$, $R=0{,}90$, als rechte Seite 0,83. Also sind $n=16$, $X \sim 150$, $R=0{,}9$ die Parameter des Modells. —

Die obigen Überlegungen haben uns nun auch indirekt die in Abschn. **4** gestellte Frage 1. beantwortet: Es sind tatsächlich alle (r^2-f^2) des (0,0, … 1,1) Quadrates realisierbar. Mit Ausnahme der Wertepaare $r^2=1$, $0 \leqq f^2 < 1$, die aber von vornherein unmöglich waren, weil aus $r^2=1$ notwendig $f^2=1$ folgt.

Man sieht also, daß man für die gewissermaßen normalen Fälle $r^2 \geqq f^2$ mit dem einfachen anschaulichen Überdeckungsmodell von Abschn. **6** auskommt. Ein hinlänglich allgemeines Modell für das ganze Quadrat wird durch das in Abschn. **9** erklärte geliefert. Das zugehörige „Spiel“, das zur Darstellung von f^2 und (negativen bzw. positiven) $r'(X)$ dient, ist dann, um es nochmal zusammenzufassen, das folgende: Es sind, wie in Abb. 5 zwei einander überdeckende Gebiete F_1 und F_2 innerhalb eines größeren Gebietes F gegeben. Es werden n Kugeln nach F geworfen. Treffen $\nu < n$ Kugeln nach F_1, so erhält der Spieler ν rote Spielmarken, für $\nu = n$ insbesonders $(n+X)$ solche. Treffen $\nu \leqq n$ Kugeln nach F_2, so erhält (bzw. zahlt) der Werfende ν bzw. $(n+X)$ blaue Marken. Gesucht ist die Korrelation zwischen dem Gewinn an roten, dem Gewinn (bzw. Verlust) an blauen Marken.

An Überlegungen, wie den hier angestellten, bestätigt sich, daß aus einer einzelnen Korrelationszahl, z. B. einem bestimmten ϱ, sich immer nur eine allererste Orientierung über die Abhängigkeitsverhältnisse des Materials ergibt. Durch Angabe einer solchen Zahl wird der an sich ganz unbestimmte Begriff der „Abhängigkeit“ in einer bestimmten Richtung definitionsgemäß präzisiert. Es hat in diesem Sinn kaum eine Berechtigung, ein Korrelationsmaß entscheidend gegen ein anderes auszuspielen. Die Berechnung von mehreren Korrelationszahlen, hier z. B. von ϱ und φ^2, kann auch nie zu „widersprechenden“ Ergebnissen führen. Vielmehr vertieft sie unsere Kenntnis von der Art des stochastischen Zusammenhanges. 416

Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung[*].

Von *L. Schiller* VDI in Leipzig.

1. Einleitende Übersicht. Das Turbulenzproblem ist durch zweierlei Fragestellungen gekennzeichnet: Die eine bezieht sich auf die Bedingungen, unter denen Turbulenz entsteht, die andere auf die Eigenschaften der ausgebildeten Turbulenz. Der Schwerpunkt derjenigen Arbeiten, die sich auf die ausgebildete Turbulenz beziehen, lag bis vor kurzem durchaus in experimentellen Untersuchungen. Erst neuerdings sind durch die Arbeiten von Prandtl und Kármán (Mischungsweg, Kármánscher Ähnlichkeitsansatz) fruchtbare theoretische Gesichtspunkte zur Geltung gebracht worden. Die Frage nach der Entstehung der Turbulenz hingegen hat vorwiegend die Mathematiker beschäftigt, die insbesondere in einer größeren Reihe von Untersuchungen über die Stabilität der Laminarströmung Beiträge zu diesem Problem geliefert haben. Die experimentelle Untersuchung der entstehenden Turbulenz ist seit der grundlegenden Arbeit von Reynolds[1]) in den Hintergrund getreten. Unter den verhältnismäßig wenigen einschlägigen Arbeiten darf ich hier vielleicht diejenige nennen, die ich selbst dank Prof. Prandtls Anregung im Göttinger Institut für angew. Mechanik vor längerer Zeit habe durchführen können[2]). In ihr wurde unter anderem die Abhängigkeit der kritischen Zahl der Rohrströmung von Anfangsstörungen und Anlauflänge qualitativ untersucht. In einer späteren Arbeit[3]) konnten wir in Leipzig die Abhängigkeit der kritischen Zahl von der Anlauflänge in einer Kurve festlegen. Offen blieb zunächst noch die quantitative Abhängigkeit der kritischen Zahl von der Anfangsstörung. Ihre Beantwortung war notwendig geknüpft an eine Messung der Anfangsstörung. Über einen ersten Vorstoß in dieser Richtung konnte ich bei dem Mechanik-Kongreß in Stockholm berichten[4]). Unsere Messung der Anfangsstörung beruht darauf, daß wir die Zirkulation der aus einer Diskontinuitätsfläche sich entwickelnden Wirbel gleichsetzen können der Zirkulation des in ihnen aufgewickelten Stückes der Diskontinuitätsfläche. Das Ergebnis der für das Rohr mit kreisförmigem Querschnitt durchgeführten Messungen war: Turbulenz tritt ein, wenn die Zirkulation der Störungswirbel pro Längeneinheit gleich geworden ist der in einer gleichlangen Wandschicht von der Dicke der Störungswirbel bei laminarer Strömung enthaltenen Profilzirkulation. Daß hiermit ein nicht ganz spezielles Ergebnis ausgesprochen war, ergab sich aus der Tatsache, daß diese Formulierung sowohl für gewöhnlichen scharfen Einlauf wie für einen ringförmig abgedeckten Einlauf zutraf. Es mußte jedoch unser Bestreben sein, noch für möglichst abweichende andere Formen das Resultat zu bestätigen und damit an Stelle der von den Anfangsbedingungen abhängigen kritischen Reynoldsschen Zahlen eine einheitliche Aussage treten zu lassen. Als weitere Untersuchungsobjekte haben wir neuerdings in Angriff genommen Rohre verschiedenen Durchmessers, andere Einlaufformen, Kanal (ebenes Problem) und die parallel angeströmte Platte. Die Rohrmessungen wurden durch Herrn Kurzweg[4a]) durchgeführt. Die Messungen an Platte und Kanal hat Herr Dr. Naumann mit der sehr dankenswerten Unterstützung der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft durchführen können.

Wenn wir bei der Formulierung unserer Fragestellung von dem rein experimentellen Ergebnis ausgegangen waren, daß zunehmende Störung Herabsetzung der kritischen Zahl bedingt, so haben wir dabei die Tatsache nicht aus dem Auge verloren, daß die theoretischen Stabilitätsuntersuchungen in ihrem Ergebnis den Störungsgrad nicht, dagegen die Wellenlänge als charakteristischen Parameter enthalten. Wir haben deswegen auch der Wellenlänge unser besonderes Augenmerk geschenkt. Wir haben außer dem Rohr auch die Platte in Angriff genommen, da allein für diese in der Arbeit von Tollmien[5]) ein mit der Erfahrung vergleichbares theoretisches Ergebnis vorliegt.

2. Methode der Rohrmessungen. Zunächst ein paar Worte über unsere Messungsmethode bei den Rohruntersuchungen. Abb. 1 zeigt Ihnen bei laminarer Strömung ($Re = \frac{\bar{u} \cdot a}{\nu} = 3040$; a = Halbmesser) den abgerundeten Rohreinlauf. Knapp um die untere Einlaufkante läuft ein Farbfaden, der erste Ansätze von Einrollungen zeigt. Die nächste Abb. 2 zeigt Ihnen am

*) Vortrag, gehalten auf der Aerodynamiktagung in Göttingen am 7. Juni 1933.

1) O. Reynolds: Philos. Trans. **174** (1883) S. 935; auch Papers II, S. 51.

2) L. Schiller: Forsch.-Arb. Geb. Ing.-Wes. **248**, 1922; auch Z. angew. Math. Mech. **1** (1921), S. 436.

3) L. Schiller: Physik. Z. **26** (1925), S. 64.

4) L. Schiller: Verhdlgn. d. III. Int. Kongr. f. techn. Mech., Stockholm 1930, I, S. 226. — A. Naumann: Forschg. Geb. Ing.-Wes. **2** (1931), S. 85.

4a) Zusatz bei der Korrektur: Vgl. die inzwischen veröffentlichte Dissertation: H. Kurzweg, Ann. d. Phys. (5) **18**, 193. 1933.

5) W. Tollmien: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929, S. 21.

scharfen Einlauf kräftigere Einrollungen bei turbulenter Strömung ($Re = 2400$), die folgende Abb. 3 eine Aufnahme bei scharfem Einlauf und turbulenter Strömung ($Re = 3000$). Hier ist unten der Farbfaden knapp um die Einlaufkante geführt, oben mit einem kleinen Abstand. Letzteres liefert den Anschein eines größeren langgestreckten Wirbels, während die bessere Farbführung unten zeigt, daß es sich auch hier um eine Diskontinuitätsfläche mit Wellungen



Abb. 1. Abgerundeter Einlauf, $Re = 3040$.

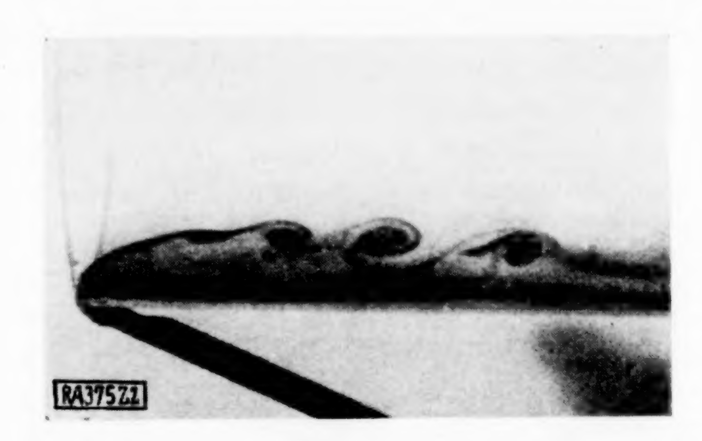


Abb. 2. Scharfer Einlauf, $Re = 2400$.

und Einrollungen handelt. Zwischen dieser Diskontinuitätsfläche und der Rohrwand befindet sich das Totwasser, innerhalb der Diskontinuitätsfläche die Strömung. Deren Geschwindigkeit ergibt sich unter Berücksichtigung der Kontraktionsziffer α aus der Durchflußmenge. Mit dieser Geschwindigkeit gleitet die Strömung längs der Diskontinuitätsfläche über das Totwasser hinweg. Hieraus bestimmt sich die Zirkulation pro Wirbelabstand l als $\frac{\bar{u}\, l}{\alpha}$ und damit dieser gleich die Zirkulation eines Wirbels. Hiermit ist in Kürze der Kernpunkt unserer Messungsmethode gekennzeichnet. Diese Wirbel bekannter Stärke werden nun mit der

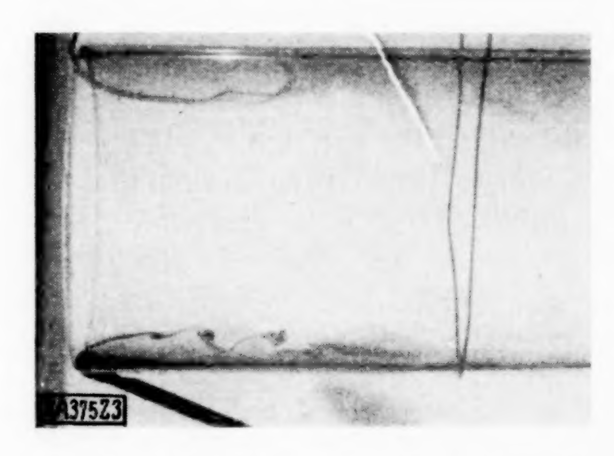


Abb. 3. Scharfer Einlauf, $Re = 3000$.

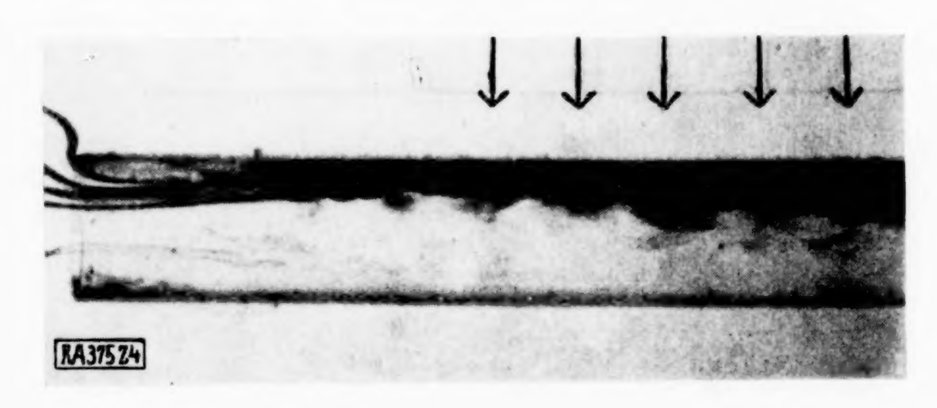


Abb. 4. L, scharfer Einlauf, $Re = 1600$.

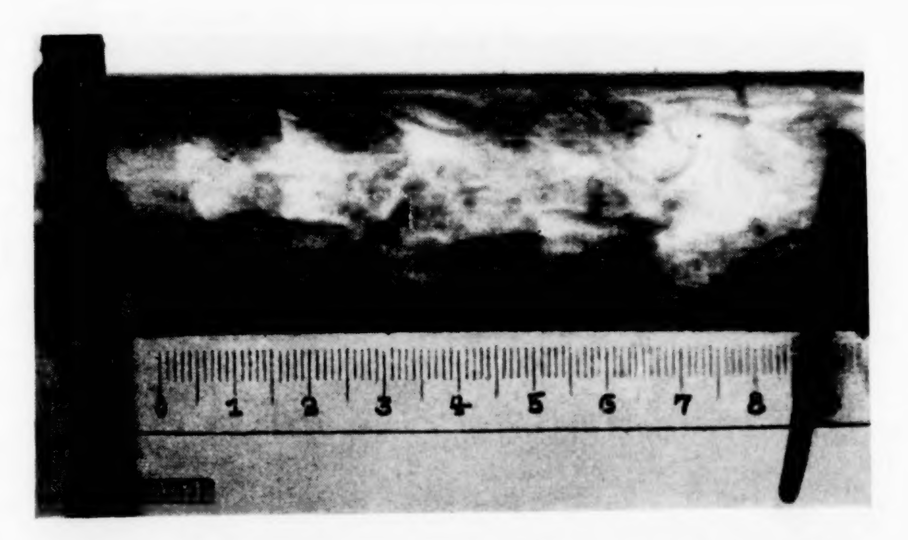


Abb. 5. Wirbelringstraße am scharfen Einlauf, $Re = 1550$.

Strömung stromabwärts getragen, verändern dabei ihren Abstand und führen im kritischen Fall schließlich zur Turbulenz. Maßgebend für den Umschlag müssen die Verhältnisse an oder kurz vor der Umschlagsstelle sein; wir müssen deswegen auch die Wirbelabstände weiter stromabwärts (L) kennen. Abb. 4 zeigt eine solche Aufnahme.

Nach dem Thomsonschen Satz sei die Wirbelstärke des Einzelwirbels gleich der am Einlauf ermittelten. In unseren früheren Untersuchungen konnten wir nun für den scharfen Einlauf und einen ringförmig abgedeckten Einlauf die einheitliche Feststellung machen: Turbulenz setzt stets ein, wenn die Zirkulation der Störungswirbel pro Längeneinheit (oder pro Rohrhalbmesser a) gleich geworden ist der Zirkulation des Laminarprofils in einer Wandschicht von gleicher Länge und von der Dicke der dort befindlichen Störungswirbel. Dabei bestimmen wir diese Dicke nicht durch unmittelbare Messungen, da diese durch die Zufälligkeiten der Farbverteilung leicht fehlerhaft sein kann, sondern unter der plausiblen und in ihrem Ergebnis mit den Bildern verträglichen Voraussetzung, daß die Wirbel mit der Umfangsgeschwindigkeit $\bar{u}$ rotieren sollen[6]). Die nächste Abb. 5 zeigt Ihnen zunächst als Ergebnis kreisförmiger Farbzuführung die Tatsache, daß es sich natürlich stets um Ringwirbel handelt.

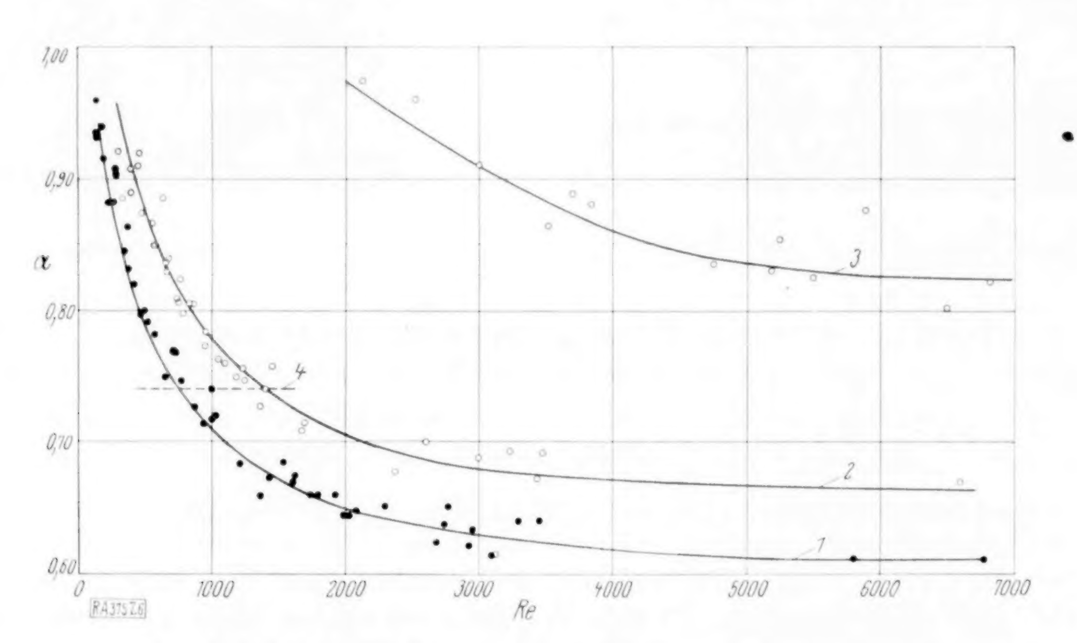


Abb. 6. Die Kontraktionsziffer in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. (1) scharfer Einlauf (wie Abb. 2); (2) scharfer Einlauf (an ebene Trogwand angesetzt); (3) abgerundeter Einlauf; (4) scharfer Einlauf nach Naumann (s. Fußnote 4).

Abb. 6 zeigt Ihnen neue Bestimmungen der Kontraktionsziffer für verschiedene Einlaufformen in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. Mit ihrer Hilfe konnten unsere früheren Messungen, die (vgl. Kurve 4) mit konstanter Kontraktionsziffer errechnet waren, erheblich verschärft werden. Weiterhin wurde im Falle des scharfen Einlaufs festgestellt, daß ziemlich regelmäßige Vereinigungen von Störungswirbeln stattfinden, wie die folgende Abbildung 7 erkennen läßt. Die obere Kurve zeigt die Wirbelfrequenz am Einlauf, die untere die hinten im Rohr. Damit ergibt sich die jeweilige Zahl der Wirbelvereinigungen, die bei der Ermittlung der Störungswirbelstärke berücksichtigt werden müssen.

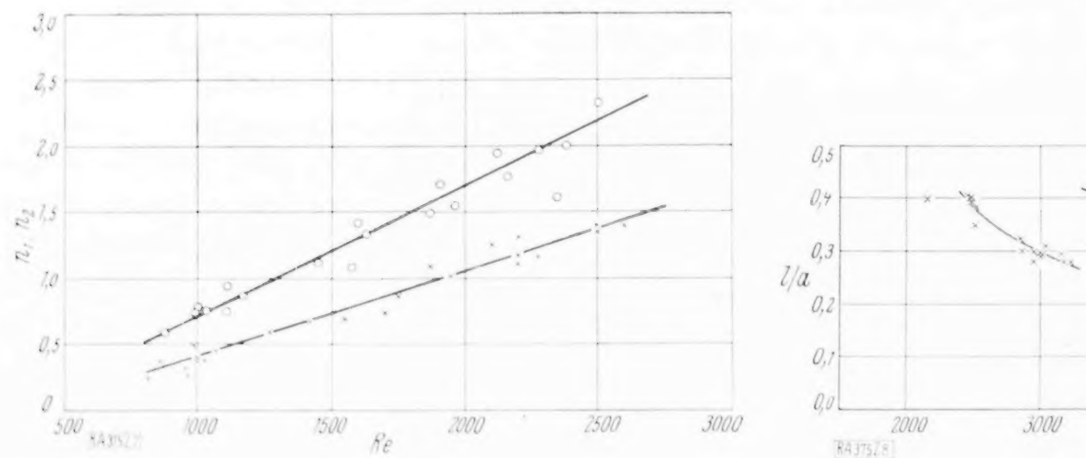


Abb. 7. Wirbelfrequenz im Rohr: n_1 (○) am Einlauf; n_2 (×) weiter stromab.

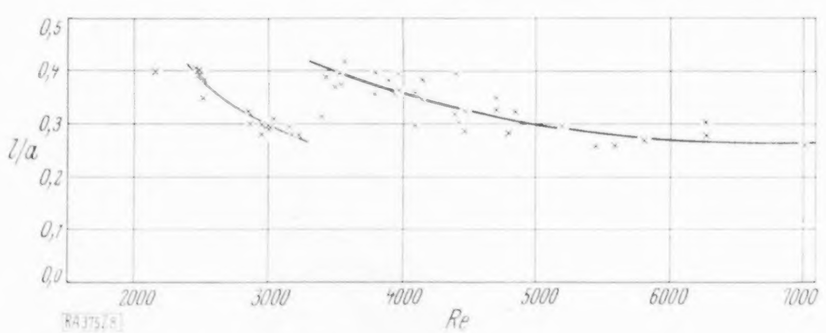


Abb. 8. Wirbelstand l/a in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl, abgerundeter Einlauf.

Abb. 8 zeigt für den abgerundeten Einlauf die Wirbelabstände l/a. Man erkennt, daß bei dem Einsatz der Turbulenz ($Re = 3200$) die Wirbelabstände sprunghaft in die Höhe gehen. Die nächste Abb. 9 gibt eine Gesamtübersicht über die Wirbelabstände unter den verschiedenen Einlaufbedingungen, sowohl für die l wie für die L. Der Verlauf ist durchaus gleichartig, nur unterschieden durch den Sprung der l bzw. L bei den verschiedenen kritischen Zahlen.

[6]) Einzelheiten dieser Berechnungen s. bei Naumann (s. Fußnote 4).

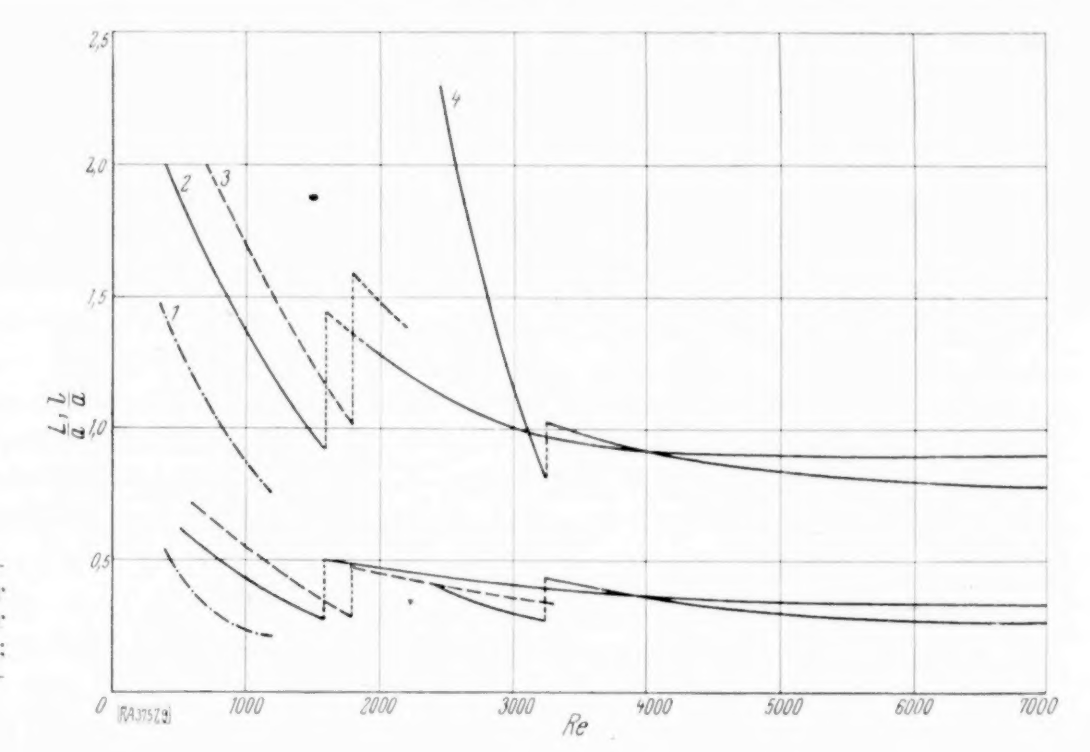


Abb. 9. Gesamtübersicht der Wirbelabstände in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. (1) abgedeckter Einlauf; (2) scharfer Einlauf, $a = 1{,}60$ cm; (3) scharfer Einlauf, $a = 4{,}79$ cm; (4) abgerundeter Einlauf.

3. Nachweis des Satzes über das Turbulenzkriterium bei den verschiedenen Formen. Das Ergebnis der neueren Rohrmessungen ersehen Sie aus der folgenden Tabelle. Sie zeigt für

Tabelle.

Rohr	Beob. Re_{krit}	Re_{krit} aus $\frac{Z}{\Gamma} = 1$
scharf . . . $a = 1{,}60$ cm	1600	1650
scharf . . . $a = 4{,}79$ „	1750	2150
abgerundet . $a = 1{,}56$ „	3250	3250
abgedeckt . $a = 1{,}60$ „	1200	1200
Kanal . . $b = 15$ „	5200	5000

scharfen Einlauf (2 verschiedene Rohrweiten), abgerundeten Einlauf, ringförmig abgedeckten Einlauf und offenen Kanal in der zweiten Spalte die beobachteten kritischen Zahlen, in der dritten Spalte die Reynoldsschen Zahlen, bei denen die oben definierten beiden Zirkulationen einander gleich geworden sind. Alles in allem genommen zeigt die Tabelle, daß für die recht verschiedenen Bedingungen unser Satz durch die Messungen weitgehend bestätigt erscheint. An Stelle der verschiedenen kritischen Zahlen tritt also jetzt als Turbulenzkriterium die Bedingung $\frac{Z}{\Gamma} = 1$, wo Z und Γ die oben erklärten Zirkulationen bedeuten. Man wird auch sagen dürfen, daß abgesehen von der hierdurch gegebenen Vereinheitlichung das neue Kriterium eine anschaulichere Aussage darstellt.

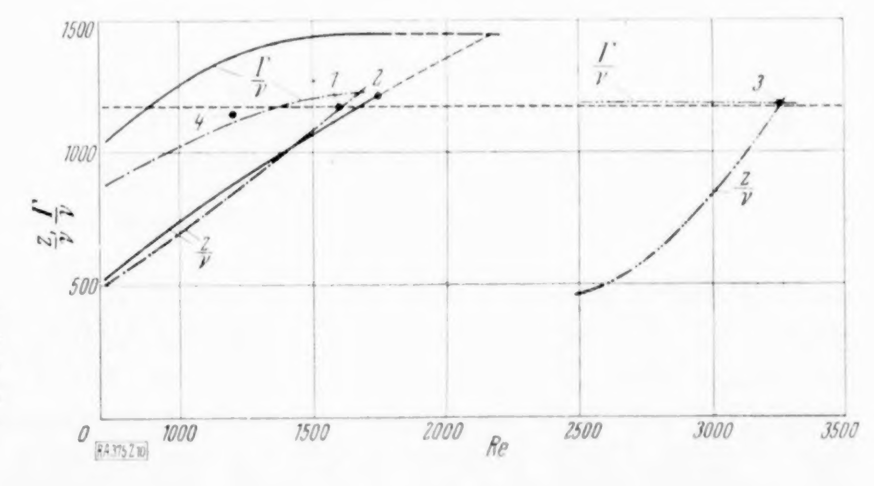


Abb. 10. Störungs- und Profilzirkulation in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl für die verschiedenen Einlaufformen. Kritische Zirkulationsbeträge: (1) scharfer Einlauf, $a = 1{,}60$ cm; (2) scharfer Einlauf, $a = 4{,}79$ cm; (3) abgerundeter Einlauf; (4) abgedeckter Einlauf.

4. Ein neues Turbulenzkriterium. Über dieses Ergebnis hinaus ist es nun neuerdings gelungen, an Stelle des eben genannten, in der Definition von Γ immerhin noch etwas komplizierten Kriteriums ein anderes von geradezu klassischer Einfachheit zu setzen. Abb. 10 zeigt zunächst für die verschiedenen Fälle den Verlauf der Störungs- und Profilzirkulation in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. Die Schnittpunkte entsprechen den in der

vorigen Tabelle angegebenen kritischen Punkten unseres Gesetzes. Die eingetragenen schwarzen Punkte bedeuten die bei den beobachteten kritischen Reynoldsschen Zahlen vorhandenen Störungszirkulationen der verschiedenen Einlaufbedingungen. Man erkennt sofort, daß sie für alle Fälle sich ganz nahe um einen Wert (1170) gruppieren. Das bedeutet also: Turbulenz tritt in allen Fällen ein, wenn die durch ν dimensionslos gemachte Störungszirkulation pro Länge a (= Halbmesser) gleich 1170 geworden ist. Dies ist sicher gegenüber den bisherigen vielen, reichlich undefinierten kritischen Zahlen ein Resultat von kaum mehr zu übertreffender Einfachheit.

5. Das Kriterium der Wellenlänge für das Rohr. Wir haben sonach unabhängig voneinander zwei experimentelle Ergebnisse für den Umschlag von laminar zu turbulent gefunden, von denen jedes ungefähr gleich gut die tatsächlichen Verhältnisse wiedergibt. Formelmäßig lassen sich die beiden Aussagen durch die folgenden Gleichungen für die Zirkulation pro Halbmesser a ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} Z/\nu &= \frac{\pi\, d\, \bar{u}\, a}{\nu\, L} = 1170 \\ \frac{\pi\, d\, \bar{u}\, a}{\nu\, L} &= 2\,\frac{\bar{u}\, a}{\nu}\left(2\,\frac{d}{a} - \left(\frac{d}{a}\right)^2\right) \qquad (d = \text{Wirbeldicke}) \end{aligned}\right\}^{6a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen die Wirbeldicke d, so ergibt sich für den kritischen Punkt die Beziehung:

$$\frac{2\,\pi\, a}{L} = 4 \pm 4\sqrt{-\frac{1170}{2\,Re} + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierin bedeutet Re die kritische Reynoldssche Zahl, bezogen auf Halbmesser a, und L die kritische Wellenlänge. Wir haben also das interessante Ergebnis, daß der Übergang zur Turbulenz nicht vom Grad der Störung, sondern allein abhängt von der Wellenlänge der Störung — in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Stabilitätsuntersuchungen für das ebene Problem.

Die Gl. (2) gilt zunächst streng genommen innerhalb unseres Beobachtungsbereiches. Wir wollen sie jedoch darüber hinaus extrapolieren und erhalten damit die in Abb. 11 ein-

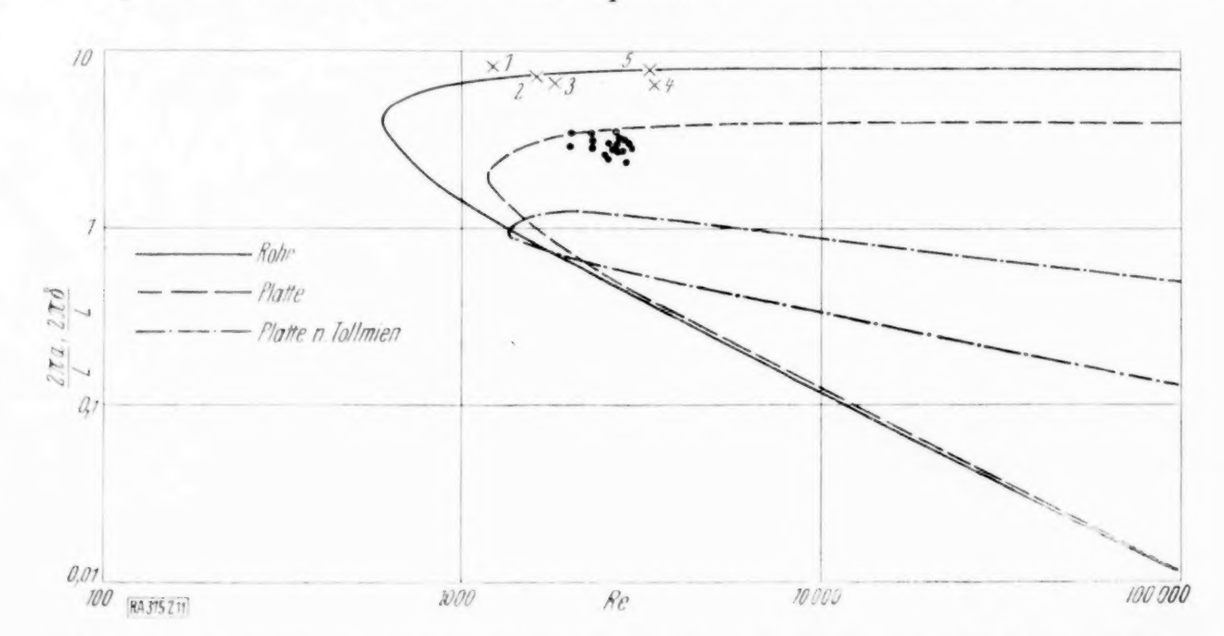


Abb. 11. Die kritischen Wellenlängen in Abhängigkeit von der kritischen Zahl. (1) abgedeckter Einlauf; (2) scharfer Einlauf, $a = 1{,}60$ cm; (3) scharfer Einlauf, $a = 4{,}79$ cm; (4) abgerundeter Einlauf; (5) Kanal.

gezeichnete ausgezogene Kurve. In das Bild sind ferner eingezeichnet fünf Kreuze, entsprechend den bei den verschiedenen Einläufen usw. beobachteten kritischen Wellenlängen. Sämtliche Punkte liegen recht gut an der durch Gl. (2) dargestellten Kurve. In der gleichen Abbildung ist noch die Tollmiensche Durchgangskurve (von stabil zu labil) für die parallel angeströmte Platte eingezeichnet, die einen recht ähnlichen Verlauf zeigt und innerhalb des von unserer Kurve umrandeten Bereiches liegt.

Eine Prüfung der Tollmienschen Ergebnisse erfordert Versuche mit einer parallel angeströmten Platte, da allein auf diesen Fall Tollmien seine allgemeinen Ergebnisse besonders angewendet hat.

[6a]) Die erste Gleichung enthält die in Ziffer 2 angegebene Bedingung, daß die Wirbel mit der Umfangsgeschwindigkeit $\bar{u}$ rotieren; zur zweiten Gleichung vgl. ebenfalls Ziffer 2 und Naumann, l. c.

6. Methodisches der Messungen an der Platte. Die Versuche wurden durchgeführt in einem offenen Kanal von 40 cm Breite und 40 cm Tiefe; eine Kreiselpumpe von 1,4 PS gestattete, Strömungsgeschwindigkeiten bis zu 16 cm pro Sekunde zu erreichen. Die Versuchsplatte aus Spiegelglas von 0,6 cm Dicke hatte eine Länge von 3 m und ragte etwa 6 cm aus dem Wasser heraus. An ihrer Vorderseite wurde ein Aluminiumkeil von 14 cm Länge aufgesetzt, dessen eine Seite glatt mit der Plattenoberfläche verlief und dessen andere winklig an die andere Plattenoberfläche angrenzte. Als Untersuchungsseite diente die des glatten Anschlusses. Die durch Gleichrichter möglichst beruhigte Strömung wurde durch Aluminiumpulver auf der Oberfläche oder Farbfäden im Innern sichtbar gemacht. Die Wellenlängen wurden teils durch Augenbeobachtung mit Hilfe eines Maßstabes, teils aus photographischen oder kinematographischen Aufnahmen ermittelt.

Um den Bedingungen der Theorie gerecht zu werden, mußte möglichst genau der Anströmungswinkel Null eingestellt werden. Da diese Einstellung auch mit Benutzung einer angebrachten Feinverstellung mittels Triebes wirklich exakt nicht behauptet werden kann, hielten wir es für zweckmäßig, um den Winkel Null herum die Anströmungsrichtung zu variieren und die Messung für verschiedene kleine Winkel durchzuführen.

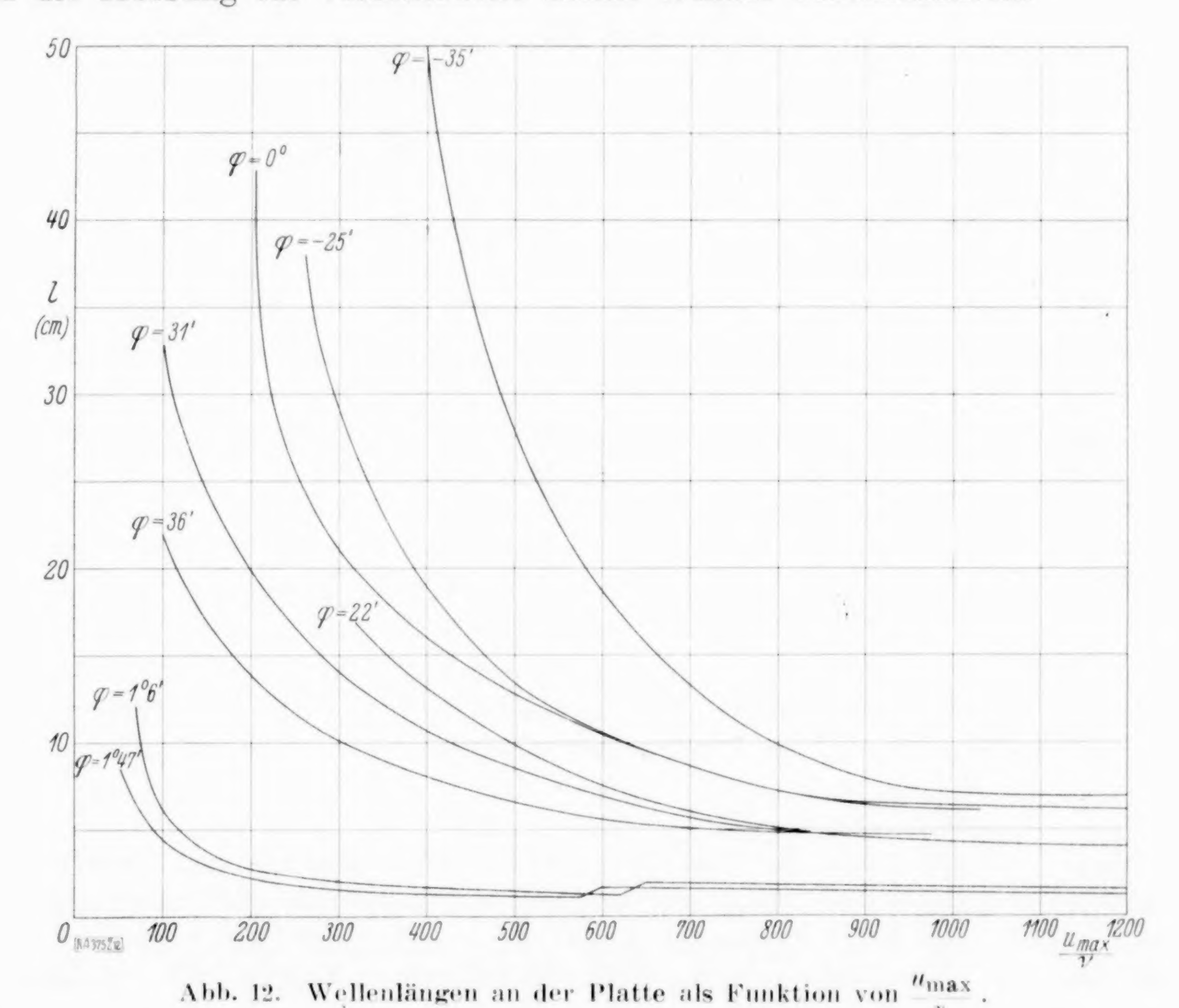


Abb. 12. Wellenlängen an der Platte als Funktion von $\frac{u_{max}}{\nu}$.

7. Wellenlängenmessungen an der Platte. Die Ergebnisse der Wellenlängenmessungen zeigen die folgenden beiden Abbildungen, zunächst Abb. 12: Es ist aufgetragen die Wellenlänge in Zentimetern als Funktion von $\frac{u_{max}}{\nu}$ (u_{max} = Anströmungsgeschwindigkeit). Parameter ist der Anströmungswinkel φ. Die Wellenlängen steigen bei kleinen Geschwindigkeiten kräftig an. Positive Winkel bedeuten Ablösung auf der Untersuchungsseite. Abb. 13 zeigt eine andere Auftragung: Wellenlänge als Funktion von φ, Parameter $\frac{u_{max}}{\nu}$.

Zur Feststellung der kritischen Reynoldsschen Zahl war neben der (variablen) Geschwindigkeit u_{max} noch der Ort des Umschlages zu ermitteln. Als solcher gilt die Stelle, wo die regelmäßigen Wellen bzw. Wirbel sich in regellose Turbulenz auflösen. Abb. 14 zeigt die kritische Zahl $Re_x = \frac{x \cdot u_{max}}{\nu}$ als Funktion des Anströmungswinkels. Für $\varphi = 0^0$ ergibt sich $Re_x = 260000$ in guter Übereinstimmung z. B. mit dem von v. d. Hegge Zijnen gefundenen Werte 300000. Neigungswinkel $\varphi = 1^0$ setzt die kritische Zahl bereits auf ca. 20000 herab, Anströmung unter kleinen negativen Winkeln hingegen erhöht die kritische Zahl noch etwas.

Möglichst nahe vor der Umschlagstelle wurden nun auch die Wellenlängen gemessen, die zum Umschlag führen und damit die „kritischen Wellenlängen" darstellen. Für sehr kleine Anstellwinkel unterscheiden sie sich praktisch nicht von den weiter stromaufwärts

gemessenen Wellenlängen. Abb. 11 zeigt die dimensionslose reziproke Wellenlänge $\frac{2\pi\delta}{L}$ (δ = Grenzschichtdicke nach Blasius) als Funktion von $Re = \frac{u_{max} \cdot \delta}{\nu}$, d. h. ähnlich der von Tollmien benutzten Auftragung, nur Grenzschichtdicke statt Verdrängungsdicke. Die beobachteten kritischen Wellenlängen sind als Punkte eingetragen und liegen alle in der Gegend von $\frac{2\pi\delta}{L} = 2{,}8$. Dabei sind die kleineren kritischen Reynoldsschen Zahlen den positiven Anstellwinkeln zugeordnet, die größeren den negativen Anstellwinkeln, bzw. dem Winkel Null. Die kritischen Reynoldsschen Zahlen liegen etwa wie die des Rohres, die kritischen reziproken Wellenlängen tiefer und damit der Tollmienschen Kurve näher. Die kritischen Wellenlängen betragen etwa das 0,4fache der entsprechenden Tollmienschen oberen Durchgangspunkte[7]).

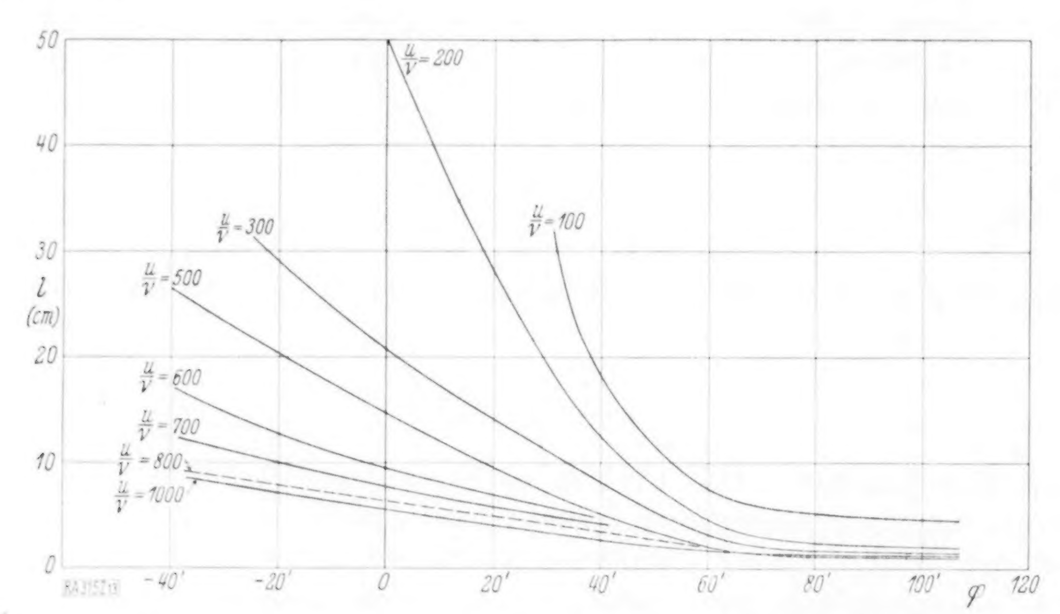


Abb. 13. Wellenlängen als Funktion des Anströmungswinkels.

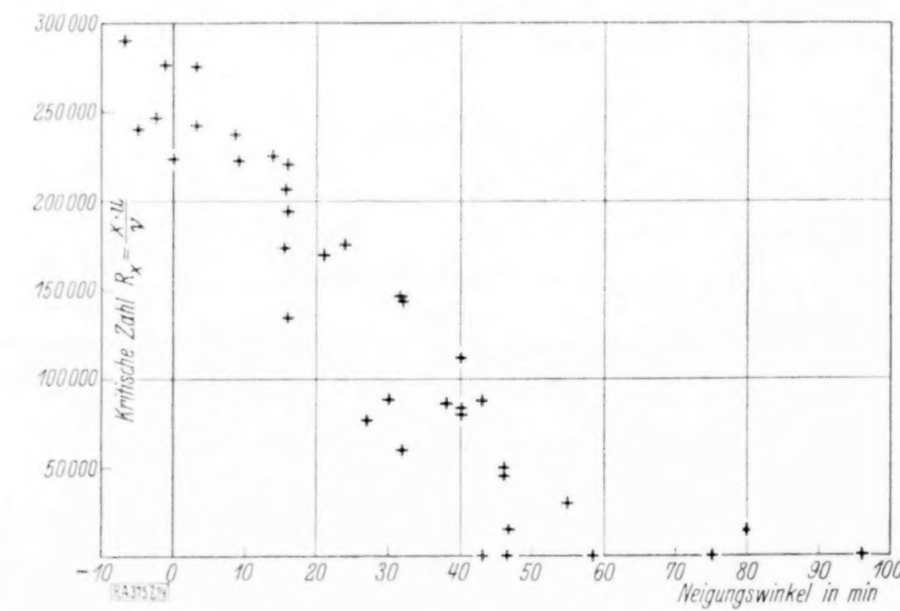


Abb. 14. Kritische Zahl der Platte als Funktion des Anströmungswinkels.

8. Das Kriterium der Wellenlängen für die Platte. Die Schar der eingetragenen Punkte können wir in Parallele setzen zu den Beobachtungspunkten beim Rohr, wenn wir die verschiedenen kleinen Anströmungswinkel verschiedenen Einlaufbedingungen entsprechen lassen. Dann gilt entsprechend den Gl. (1) beim Rohr hier näherungsweise ein entsprechendes Gleichungspaar und damit auch eine entsprechende Gleichung für die kritische Wellenlänge:

$$\frac{2\pi\delta}{L} = 2\left(1 \pm \sqrt{-\frac{1170}{Re} + 1}\right)^{8)}.$$

Die beobachteten kritischen Wellenlängen liegen ziemlich gut an der Kurve. Die Kurve im ganzen gleicht wieder der Tollmienschen, die sie im wesentlichen einrahmt und mit der sie insbesondere den unteren Grenzwert der kritischen Zahl annähernd gemeinsam hat. 375

[7]) Zusatz bei der Korrektur: Die von uns beobachteten kritischen Wellenlängen stehen, ebenso wie die höheren der von Nikuradse beobachteten und von ihm am gleichen Tage referierten (diese Zeitschr. **13**, 174. 1933) kritischen Frequenzen, nicht recht mit der Tollmien-Schlichtingschen Theorie in Einklang. Dies läßt mit der Möglichkeit rechnen, daß der Tollmiensche Labilitätsbereich für die tatsächlichen Verhältnisse zu eng sein dürfte.

[8]) Der Wert $Z/\nu = 1170$ ist hierher einstweilen von den Rohrergebnissen übernommen worden. Als Umfangsgeschwindigkeit der Wirbel ist u_{max} eingesetzt.

Biegung krummer Stäbe.

Von *Georg Lindner* in Stuttgart.

Inhalt: Die Berechnung der Biegespannungen wird unter der Annahme einer leichten Krümmung der Querschnitte durchgeführt, die von der Art des Biegevorganges abhängig ist.

Einleitung. Der üblichen Theorie der Biegung liegt die Annahme zugrunde, daß die Querschnitte des Stabes eben bleiben. Das hat bei geraden Stäben (Abb. 10) keine Bedenken, wohl aber bei krummen Stäben (Abb. 11). Hier würde in der Krümmungs- und Biegeebene die Verlängerung eines geraden, sich schräg einstellenden Querschnittes an dem Krümmungsmittelpunkte vorbeigehen, so daß eine in dessen Nähe liegende Längsfaser des Stabes eine übernatürliche Dehnung erleiden müßte. Unter dieser Beobachtung verliert die Biegetheorie das Zutrauen; sie stimmt auch mit den Erfahrungen nicht recht überein.

Zur Veranschaulichung diene ein scharfwinklig gekrümmter Stab (Abb. 8), dessen Krümmungsmittelpunkt nahezu an der innern Kante liegt. Die nach der Theorie berechneten Spannungen σ ändern sich hyperbolisch, nach außen allmählich, nach innen sehr stark ansteigend, bis zu dem Werte ∞ in der Höhe des Krümmungsmittelpunktes. Schon bei geringem Biegemoment M müßte der Stab im Knick brechen, was in Wirklichkeit nicht eintritt. Ebenso würde eine halbkreisförmige Scheibe (Abb. 9), wenn auch nur mäßige Kräfte P in der Richtung ihres Durchmessers wirken, unter der unendlich großen Spannung σ_1 im Mittelpunkt einreißen.

Man wird der Wirklichkeit näherkommen mit der Annahme, daß der Querschnitt — und seine Verlängerung nach innen — in einem sanften Bogen jeweils durch den Krümmungsmittelpunkt hindurchgeht (Abb. 12 und 13).

Im folgenden soll zunächst die übliche Theorie zum Vergleich in aller Kürze entwickelt werden, und zwar für ein ohne Einzelkraft wirkendes Moment, das an der äußern Stabkante Zugspannung hervorruft. Für denselben Fall wird danach die Biegelehre unter der Annahme parabolischer Verbiegung der Querschnitte aufgestellt; sie stimmt im ganzen mit der für gerade Stäbe gültigen überein. Weiter ergibt die Annahme hyperbolischer Verbiegung der Querschnitte eine der üblichen Theorie verwandte Berechnungsart. Allenfalls könnte auch eine Art Kettenlinie in Frage kommen. Schließlich ist, nach Ermittlung der Biegearbeiten, der Geltungsbereich der beiden Annahmen zu beurteilen.

Die Ausrechnung erstreckt sich auf die geometrischen Grundformen für die Querschnitte (Abb. 1 bis 7), nämlich auf Kreise und Ellipsen, Rechtecke, Trapeze und Dreiecke, sowie auf den Hakenquerschnitt, wie er im Lexikon der gesamten Technik (3. Aufl., Bd. 3, S. 758) angegeben ist.

I. Ebenbleibende Querschnitte (Abb. 11). An einem Stabe, dessen Schwerpunktslinie in der Krümmungsebene den Radius r hat, betrachtet man einen äußerst kurzen Abschnitt vom Winkel α. Das in derselben Ebene wirkende Moment M streckt die äußern und staucht die innern Fasern so, daß sich der eine Endquerschnitt, ebenbleibend, um den sehr kleinen Winkel β schwenkt, und zwar um eine Nullachse, im Abstand e vom Schwerpunkte, nach innen verschoben. Eine um y außerhalb des Schwerpunktes liegende Faser, mit dem Querschnitt $df = b\,dy$, hat die Länge $l = \alpha(r+y)$ und streckt sich um $\lambda = \beta\,(e+y)$ mit der Spannung $\sigma = E\frac{\lambda}{l} = E\frac{\beta}{\alpha}\frac{e+y}{r+y}$. Wenn keine Einzelkraft wirkt, muß im ganzen Querschnitt $\int \sigma\,df = 0$ sein, während die Spannungskräfte das Moment ausgleichen, $M = \int y \cdot \sigma\,df$. Aus diesen Ansätzen folgt

$$\sigma = \frac{M}{rf}\left(1 + \frac{y}{\varkappa\,(r+y)}\right) \quad \text{mit } \varkappa = -1 + \frac{r}{f}\int\frac{df}{r+y} \quad \text{und } e = \frac{\varkappa\,r}{1+\varkappa}, \quad \text{neben } r - e = \frac{e}{\varkappa}.$$

An der Nullachse, mit $-y = e$, ist $\sigma = 0$. Von hier aus steigt nach innen die Druckspannung bis zum Höchstwert σ_1 an der Innenkante für $y = -e_1$; nach außen bestehen Zugspannungen, z. B. für $y = 0$ am Schwerpunkt $\sigma_0 = \frac{M}{rf}$.

In der Durchführung der Rechnung setzt man die „reduzierte Fläche" $\int\frac{y\,df}{r+y} = \varkappa\,f$ und hat $\varkappa$ als eine stets positive Zahl aus der Form des Querschnittes, wie folgt, zu bestimmen.

Ein Kreis (Abb. 1) vom Radius ϱ hat $df = b\,dy$ mit $b = 2\sqrt{\varrho^2 - y^2}$. Nachdem die Wurzel durch Erweiterung in den Nenner gebracht ist, kann man, wie sonst öfter, den Zähler mit Rücksicht auf den Faktor $(r+y)$ im Nenner zerlegen: $\varrho^2 - y^2 = (r+y)(r-y) - (r^2 - \varrho^2)$.

Damit erhält man

$$\varkappa = -1 + \frac{r}{f}\int \frac{d\,f}{r+y} = -1 + \frac{2\,r}{\pi\,\varrho^2}\left(\int \frac{(r-y)\,d\,y}{\sqrt{\varrho^2-y^2}} - (r^2-\varrho^2)\int \frac{d\,y}{(r+y)\sqrt{\varrho^2-y^2}}\right).$$

Die Auflösung nach den Integrationsformeln ergibt

$$K = -1 + 2\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - 2\,\frac{r}{\varrho}\sqrt{\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - 1}\,.$$

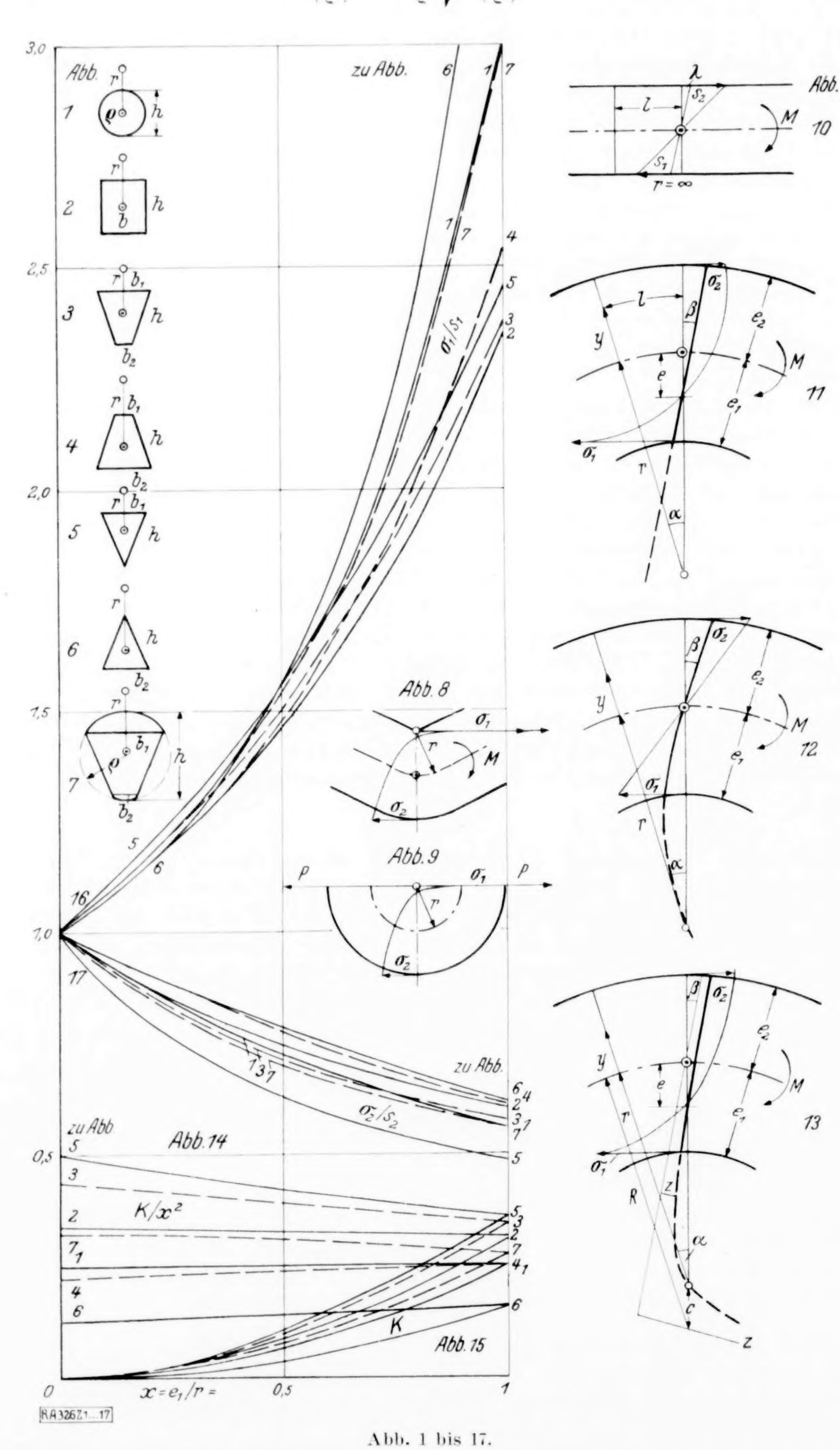


Abb. 1 bis 17.

Dieser Ausdruck für $\varkappa$ ist, auf einem andern Wege, schon von Grashof entwickelt worden; ihn durch eine Reihe darzustellen, empfiehlt sich nicht, weil damit die Ausrechnung nur umständlicher und ungenauer ausfällt.

Eine Ellipse, die im Verhältnis β breiter oder schmaler als der Kreis von der Höhe h ist, hat die gleiche Formel, weil in dem Ausdruck $\frac{1}{f}\int\frac{df}{\cdots}=\frac{1}{\pi\,\varrho^2\,\beta}\int\frac{\beta\,b\,dy}{\cdots}$ der Wert β herausfällt.

Für ein Rechteck (Abb. 2) von beliebiger Breite b und der Höhe h findet man in einfacher Weise

$$\varkappa=-1+\frac{r}{h}\ln\frac{2\,r+h}{2\,r-h}\,.$$

Ein Trapez (Abb. 3 und 4) mit der Höhe h, der Breite b_1 innen und b_2 außen, hat $f=\frac{1}{2}(b_1+b_2)\,h$ und die Schwerpunktsabstände $e_1=\frac{h}{3}\,\frac{b_1+2\,b_2}{b_1+b_2}$ von innen und $e_2=\frac{h}{3}\,\frac{2\,b_1+b_2}{b_1+b_2}$ von außen, dazu

$$\varkappa=-1+\frac{r}{f}(b_1-b_2)\left|-1+\left(\frac{b_2}{b_1-b_2}+\frac{r+e_2}{h}\right)\ln\frac{r+e_2}{r-e_1}\right|.$$

Hat z. B. das Trapez (Abb. 3) $b_1=3\,b_2$, so wird

$$\varkappa=-1+\frac{r}{h}\left|-1+\left(\frac{r}{h}+\frac{13}{12}\right)\ln\frac{12\,r+7\,h}{12\,r-5\,h}\right|.$$

Wenn aber im Trapez (Abb. 4) $b_2=3\,b_1$ ist, wird

$$\varkappa=-1+\frac{r}{h}\left|+1-\left(\frac{r}{h}-\frac{13}{12}\right)\ln\frac{12\,r+5\,h}{12\,r-7\,h}\right|.$$

Für ein Dreieck ist $\varkappa$ nach derselben Formel zu berechnen. Das nach außen verjüngte Dreieck (Abb. 5) hat

$$\varkappa=-1+2\,\frac{r}{h}\left|-1+\left(\frac{r}{h}+\frac{2}{3}\right)\ln\frac{3\,r+2\,h}{3\,r-h}\right|.$$

Das umgekehrte Dreieck (Abb. 6) sei als Beispiel für ungünstige Spannungsverteilung angeführt:

$$\varkappa=-1+2\,\frac{r}{h}\left|+1-\left(\frac{r}{h}-\frac{2}{3}\right)\ln\frac{3\,r+h}{3\,r-2\,h}\right|.$$

Als Hakenquerschnitt (Abb. 7) ist folgende Form angenommen. Ein Kreis vom Radius $\varrho=0{,}5\,h$ begrenzt die Fläche innen und außen; dazwischen liegt ein Trapez mit der Breite $b_1=0{,}866\,h$ bei $y=-0{,}5\,\varrho$, nach außen 4 : 5 verjüngt auf die Breite $b_2=0{,}282\,h$ bei $y=+0{,}96\,\varrho$. Die an der größeren Breite entstehende Kante ist auf 0,85 h abzurunden, und die kleinere Breite wird auf die bei $0{,}96\,\varrho$ bestehende Sehne von 0,280 abgeschrägt. Die Fläche hat den Inhalt $f=0{,}576\,h^2$ und das Trägheitsmoment $J=0{,}037\,h^4$. Der Schwerpunkt liegt um $0{,}1\,\varrho$ neben der Mitte, so daß $e_1=0{,}45\,h$ und $e_2=0{,}55\,h$ ist. Die Berechnung führt zu

$$\varkappa=-1+1{,}736\,\frac{r}{h}\left\{\begin{array}{l}0{,}1351+2{,}662\,\frac{r}{h}+\left(0{,}706+0{,}8\,\frac{r}{h}\right)\ln\frac{r+0{,}53\,h}{r-0{,}2\,h}\\ -\sqrt{\left(2\,\frac{r}{h}+0{,}1\right)^2-1}\left(\pi-\arcsin\frac{r-0{,}95\,h}{2\,r-0{,}4\,h}-\arcsin\frac{1{,}92\,r+1{,}096\,h}{2\,r+1{,}06\,h}\right)\end{array}\right\}.$$

Näherungsweise ist hiernach, mit $x=\frac{e_1}{r}=0$ bis 1,

$$\varkappa=x^2\,(0{,}31+0{,}08\,x+0{,}04\,x^2+0{,}75\,x^4),$$

nämlich für

$x=\frac{e_1}{r}=$	0	$^1/_4$	0,45	$^1/_2$	$^3/_4$	0,9	1
$\varkappa=$	0	0,02	0,07	0,09	0,23	0,48	1,18.

In allen Fällen erreicht die größte Spannung am innern Rande $\sigma_1 = \frac{M}{rf}\left(1 - \frac{e_1}{\varkappa\,(r - e_1)}\right)$ einen höheren Wert als bei geraden Stäben. Für diese gilt

$$s_1 = -\frac{M\,e_1}{J} = -\frac{M\,e_1}{k^2 f}\,.$$

Das Verhältnis beträgt $\frac{\sigma_1}{s_1} = \frac{k^2}{r\,e_1}\left(\frac{e_1}{\varkappa\,(r - e_1)} - 1\right)$.

Für den Sonderfall $r = h$ diene folgende Übersicht.

Kreis und Ellipse	Rechteck	Trapeze (1 : 3)		Dreiecke		Haken
Abb. 1	2	3	4	5	6	7
$e_1/h = \;^1/_2$	$^1/_2$	$^5/_{12}$	$^7/_{12}$	$^1/_3$	$^2/_3$	0,45
$\varkappa = 0{,}0718$	0,0986	0,0803	0,1020	0,0543	0,0758	0,0707
$\sigma_1/s_1 = 1{,}62$	1,52	1,45	1,67	1,37	2,11	1,51 .

Bei scharfkantiger Krümmung der Innenkante mit $r = e_1$ wäre durchweg $\sigma_1/s_1 = \infty$.

II. Parabolische Verbiegung (Abb. 12). Ausgehend von der Annahme, daß die Spannungen, wie bei geraden Stäben, von der Schwerpunktsachse aus linear wachsen, hat man $\sigma = C\,y$ anzusetzen. Der Ausgleich $\int \sigma\,df = 0$ ist dabei erfüllt, weil zufolge der Schwerpunktsbestimmung der Ausdruck $C \int y\,df = 0$ ist. Der Momentenausgleich ergibt

$$M = \int y\,\sigma\,df = C \int y^2\,df = C\,J\,, \quad \text{also } C = \frac{M}{J}\,.$$

Die Spannungen $\sigma = \frac{M}{J}\,y$ erreichen die Endwerte

$$\sigma_1 = -\frac{M}{J}\,e_1 \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{M}{J}\,e_2\,.$$

In einem Abschnitt des Stabes mit dem kleinen Winkel a ändern sich die Faserlängen

$$l = a\,(r + y) \text{ je um } \lambda = \frac{\sigma}{E}\,l = \frac{M\,a}{J\,E}\,(r\,y + y^2)\,.$$

Hierbei geht der eine Endquerschnitt in eine Form über, die sich als Parabel darstellt (Abb. 12). Sie geht durch den Schwerpunkt und den Krümmungsmittelpunkt, indem sowohl für $y = 0$ als auch für $y = -r$ je $\lambda = 0$ wird, also keine Verlagerung eintritt. Der Scheitel liegt mitten zwischen den beiden Punkten, nämlich da, wo $\frac{d\lambda}{d\,y} = \frac{M\,a}{J\,E}\,(r + 2\,y)$ gerade $= 0$ ist, also in der Höhe $-y = \frac{1}{2}\,r$. Die Parabel schneidet den Radius im Winkel $\beta = \frac{d\,\lambda}{d\,y}$, der sich für $y = 0$ zu $\beta = \frac{M\,r}{J\,E}\,a$ als Bruchteil von a ergibt. Die Formänderung des Stabes besteht hauptsächlich in einer Verstärkung der ursprünglichen Krümmung der Schwerpunktslinie, wobei sich a auf $a + \beta$ erhöht, und r auf $r\,\frac{a}{a + \beta}$ vermindert.

Läßt man gelten, daß die theoretisch bedingte, unmeßbar kleine Verbiegung der Querschnitte den Charakter einer Parabel habe, so gelangt man zu einer außerordentlich vereinfachten Berechnung, indem die Biegespannungen krummer Stäbe in der geläufigen Weise zu bestimmen sind. Dabei erhält man nicht nur bei großen Krümmungsradien, wie an Radkränzen und Kolbenringen, sondern auch an Lasthaken, bei denen r nahezu gleich h ist, einwandfreie, der Erfahrung entsprechende Ergebnisse.

III. Hyperbolische Verbiegung (Abb. 13). Zur weiteren Klärung ist noch die hyperbolische Form der Querschnitte zu untersuchen. Die Hyperbel (Abb. 13) geht durch den Krümmungsmittelpunkt und durchschneidet den ursprünglichen Querschnitt bei $y = -e$. Ihre Asymptote geht im Winkel β durch den Schwerpunkt; die andere liegt senkrecht oder schräg zur ersten im Abstande c jenseits des Krümmungsmittelpunktes.

Dieser hat die Ordinaten c und $z = r\beta$, weil der Winkel β äußerst klein ist. Das Produkt $c\,r\,\beta$ bleibt für die Hyperbel konstant. Bei $y = -e$ mit $z = e\beta$ ist also $e\,\beta\,(c + r - e) = c\,r\,\beta$, folglich $c = e$, so daß $z\,(r + e + y) = e\,r\,\beta$ die Gleichung der Hyperbel angibt. Der verlängerte Strahl $r + c$ sei mit R bezeichnet:

$$R = r + e\,.$$

Eine Faser von der Länge $l = \alpha\,(r + y)$ erfährt die Streckung $\lambda = y\,\beta + z = \dfrac{(r + y)\,(e + y)}{R + y}\,\beta$. Dazu gehört die Spannung $\sigma = E\,\dfrac{\lambda}{l} = E\,\dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{e + y}{R + y}$, mit der Bedingung $0 = \int \sigma\,df = E\,\dfrac{\beta}{\alpha} \left(\int \dfrac{e\,df}{R + y} - \int \dfrac{-y\,df}{R + y} \right)$. Entsprechend dem früheren Vorgang in Abschnitt I, wo $\int \dfrac{-y\,df}{r + y} = \varkappa\,f$ war, kann man hier $\int \dfrac{-y\,df}{R + y} = \varkappa\,f$ setzen, wobei aber jetzt $\varkappa$ kleiner ausfällt, weil $R > r$ ist. Hiernach lautet der Spannungsausgleich $\int \dfrac{e\,df}{R + y} = \varkappa\,f$. Ersetzt man e im Zähler durch $e = \dfrac{e}{R}\,[(R + y) - y]$, so erhält man $\dfrac{e}{R}\,[f + \varkappa\,f] = \varkappa\,f$, mit der Folge

$$e = \varkappa\,r \quad \text{und} \quad \varkappa = -1 + \frac{R}{f} \int \frac{df}{R + y}\,.$$

Der Momentenausgleich $M = \int y\,\sigma\,df$ ergibt $E\,\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{M}{\varkappa\,r\,f}$ und damit die Spannungen

$$\sigma = \frac{M}{\varkappa\,r\,f} \cdot \frac{\varkappa\,r + y}{(1 + \varkappa)\,r + y} = \frac{M}{e\,f} \cdot \frac{e + y}{R + y}\,.$$

Für $y = 0$ im Schwerpunkt entsteht die Zugspannung $\sigma = \dfrac{M}{R\,f}$. Bei $y = -e$ wird $\sigma = 0$. Für $y = -r = -e_1$ bleibt die Druckspannung $-\sigma = \dfrac{M\,(e_1 - e)}{\varkappa\,r\,f\,e} < \infty$. Die größte Spannung besteht an der innern Stabkante bei $y = -e_1$, nämlich $\sigma_1 = -\dfrac{M}{e\,f}\,\dfrac{e_1 - e}{R - e_1}$. Ihr Verhältnis zur Spannung im geraden Stabe $s_1 = -\dfrac{M\,e_1}{k^2\,f}$ beträgt $\dfrac{\sigma_1}{s_1} = \dfrac{k^2}{e\,e_1} \cdot \dfrac{e_1 - e}{R - e_1}$. An der Außenkante ist entsprechend $\dfrac{\sigma_2}{s_2} = \dfrac{k^2}{e\,e_1} \cdot \dfrac{e + e_2}{R + e_2}$.

Die Werte von $\varkappa$ ändern sich für jede Querschnittsform mit dem Krümmungsmaß, das man $h : r$ setzen könnte; besser $e_1 : r$, nämlich mit dem einheitlichen Grenzwerte 1 für scharfwinklige Krümmung des Stabes; es sei

$$x = \frac{e_1}{r} = 0 \text{ bis } 1\,.$$

Da $\varkappa$ sehr klein ist und ungefähr mit x^2 wächst (Abb. 15), bestimmt man genauer $\dfrac{\varkappa}{x^2}$ als eine mäßig veränderliche Zahl (Abb. 14). Für $x = 0$ ist $\dfrac{\varkappa}{x^2} = \dfrac{0}{0} = \dfrac{k^2}{e_1^{\,2}}$, weil hierbei $\dfrac{\sigma_1}{s_1} = 1$ ist und $e = \varkappa\,r = 0$ bei $R - e_1 = \infty = r$, also $\dfrac{\sigma_1}{s_1} = \dfrac{k^2}{\varkappa\,r\,e_1} \cdot \dfrac{e_1}{r} = 1$ und $\varkappa = \dfrac{k^2}{r^2}$.

Ein Kreis (Abb. 1) hat $e_1 = \varrho$, $k^2 = \dfrac{1}{4}\,\varrho^2$ und $b = 2\sqrt{\varrho^2 - y^2}$. Zur Integration ist zu setzen $[\varrho^2 - y^2] = [(R + y)\,R - (R + y)\,y - (R^2 - \varrho^2)]$. Damit erhält man

$$\varkappa = -1 + \frac{R}{f} \int \frac{df}{R + y} = -1 + \frac{R}{f}\,2\,\pi\,[R - \sqrt{R^2 - \varrho^2}]$$

und, weil $R = (1 + \varkappa)\,r$ ist, $\varkappa = \dfrac{\varrho^2}{4\,r^2}$ mit $\dfrac{\varkappa}{x^2} = \dfrac{1}{4}$.

Für die Ellipse gelten dieselben Werte.

	Für $x = \frac{e_1}{r} =$	0	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	ist $\frac{\varkappa}{x^2} =$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$
„ 15	$\varkappa =$	0	0,0156	0,0625	0,1406	0,25
„ 16	$\sigma_1/s_1 =$	1	1,22	1,56	2,08	3
„ 17	$\sigma_2/s_2 =$	1	0,84	0,72	0,63	0,56.

Bei den folgenden Querschnitten kann man für einzelne Werte von R/e_1 den Verlauf von $\varkappa$ punktweise berechnen. Es möge genügen, die danach bestimmten Näherungsformeln für $\varkappa/x^2$ anzugeben.

Ein Rechteck (Abb. 2) hat, noch leicht berechenbar,

$$\varkappa = -1 + x\,\frac{2{,}718^{2x}+1}{2{,}718^{2x}-1} = x^2\,(^1/_3 - 0{,}005\,x - 0{,}015\,x^2).$$

	$x = e_1/r = 0$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	$\varkappa/x^2 = 0{,}333$	0,331	0,327	0,321	0,313
„ 15	$\varkappa = 0$	0,0207	0,082	0,181	0,313
„ 16	$\sigma_1/s_1 = 1$	1,19	1,46	1,82	2,34
„ 17	$\sigma_2/s_2 = 1$	0,85	0,75	0,67	0,60 .

Für ein Trapez (Abb. 3) mit $b_1 = 3\,b_2$ findet sich

$$x = \frac{5}{12}\left|\frac{5}{12}\left(2{,}6 + \frac{R}{e_1}\right)\ln\frac{R/e_1 + 1{,}4}{R/e_1 - 1} - 1\right| \quad \text{und} \quad \varkappa/x^2 = 0{,}44 - 0{,}1\,x + 0{,}008\,x^2.$$

	$x = e_1/r = 0$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	$\varkappa/x^2 = 0{,}440$	0,416	0,392	0,369	0,348
„ 15	$\varkappa = 0$	0,026	0,098	0,208	0,348
„ 16	$\sigma_1/s_1 = 1$	1,22	1,51	1,88	2,37
„ 17	$\sigma_2/s_2 = 1$	0,83	0,71	0,63	0,57 .

Ein Trapez (Abb. 4) mit $b_2 = 3\,b_1$ hat

$$x = \frac{7}{12}\left|\frac{7}{12}\left(\frac{13}{7} - \frac{R}{e_1}\right)\ln\frac{R/e_1 + 5/7}{R/e_1 - 1} + 1\right| \quad \text{und} \quad \varkappa/x^2 = 0{,}2245 + 0{,}03\,x + 0{,}0018\,x^2.$$

	$x = e_1/r = 0$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	$\varkappa/x^2 = 0{,}2245$	0,232	0,240	0,248	0,2563
„ 15	$\varkappa = 0$	0,0145	0,06	0,14	0,2563
„ 16	$\sigma_1/s_1 = 1$	1,19	1,47	1,89	2,54
„ 17	$\sigma_2/s_2 = 1$	0,88	0,77	0,68	0,60 .

Ein Dreieck (Abb. 5) erhält

$$x = \frac{1}{4{,}5}\left|\left(2 + \frac{R}{e_1}\right)\ln\frac{R/e_1 + 2}{R/e_1 - 1} - 3\right| \quad \text{und} \quad \varkappa/x^2 = 0{,}5 - 0{,}19\,x + 0{,}051\,x^2.$$

	$x = e_1/r = 0$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	$\varkappa/x^2 = 0{,}5$	0,456	0,418	0,388	0,3608
„ 15	$\varkappa = 0$	0,0285	0,1045	0,218	0,3608
„ 16	$\sigma_1/s_1 = 1$	1,25	1,56	1,95	2,45
„ 17	$\sigma_2/s_2 = 1$	0,76	0,63	0,54	0,49 .

Das Dreieck (Abb. 6), nach innen verjüngt, weist besonders ungünstige Spannungsverhältnisse auf:

$$x = \frac{8}{9}\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{R}{e_1} - 1\right)\ln\frac{R/e_1 + 0{,}5}{R/e_1 - 1}\right] \qquad \varkappa/x^2 = 0{,}125 + 0{,}025\,x + 0{,}01\,x^2\,.$$

	$x = e_1/r = 0$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	$\varkappa/x^2 = 0{,}125$	0,133	0,140	0,149	0,1605
„ 15	$\varkappa = 0$	0,0083	0,035	0,0839	0,1605
„ 16	$\sigma_1/s_1 = 1$	1,20	1,55	2,22	4,07
„ 17	$\sigma_2/s_2 = 1$	0,89	0,79	0,70	0,62 .

Der Hakenquerschnitt (Abb. 7) hat

$$x = 0{,}781\left\{\begin{aligned}&0{,}002 + 1{,}331\left(2\frac{R}{h} + 0{,}1\right) + \left(0{,}706 + 0{,}8\frac{R}{h}\right)\ln\frac{R + 0{,}53\,h}{R - 0{,}2\,h}\\ &-\sqrt{\left(2\frac{R}{h} + 0{,}1\right)^2 - 1}\left(\pi - \operatorname{arc\,sin}\frac{R - 0{,}95\,h}{2\,R - 0{,}4\,h} - \operatorname{arc\,sin}\frac{1{,}92\,R + 1{,}096\,h}{2\,R + 1{,}06\,h}\right)\end{aligned}\right\}$$

$\varkappa/x^2 = 0{,}318 - 0{,}015\,x - 0{,}026\,x^2\,.$

	$x = e_1/r = 0$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1
Abb. 14	$\varkappa/x^2 = 0{,}318$	0,313	0,304	0,292	0,277
„ 15	$\varkappa = 0$	0,0195	0,076	0,164	0,277
„ 16	$\sigma_1/s_1 = 1$	1,22	1,54	2,05	2,99
„ 17	$\sigma_2/s_2 = 1$	0,82	0,70	0,62	0,56
	$h/r = 0$	$^5/_9$	$^{10}/_9$	$^{15}/_9$	$^{20}/_9$.

Für $h = r$ bei $x = 0{,}45$ ist $\varkappa = 0{,}062$.

In Anwendung der Rechnung nach diesem Abschnitt III auf einen scharfwinklig gekrümmten Stab (Abb. 8) oder eine halbkreisförmige Scheibe (Abb. 9) erhält man nach Ausweis der Abb. 16 je nach der Querschnittsform $\sigma_1 = 2\,s_1$ bis $4\,s_1$, aber nicht $\sigma_1 = \infty$ wie im Abschnitt I.

IV. Biegungsarbeit. Beim Biegen vollführt das Moment M eine Drehung um den kleinen Winkel φ und leistet, indem es gleichmäßig bis zu dem Endwert zunimmt, dabei die Arbeit $A = \frac{1}{2}M\varphi$. Diese gleicht sich mit der innern Arbeit der elastischen Formänderung des betrachteten Stababschnittes aus: $A = \int\frac{1}{2}\lambda\sigma\,df$.

Wenn die Querschnitte eben bleiben, stimmt φ mit β überein; andernfalls ergibt sich φ aus der innern Arbeit zu $\varphi = 2\,A/M$.

Für den geraden Stab (Abb. 10) ist $A_0 = \frac{1}{2}M\beta$ mit $\beta = \frac{M\,l}{E\,J} = \varphi_0$, also $A_0 = \frac{M^2\,l}{2\,E\,J}$.

Für einen krummen Stab ist nach Abschnitt I (Abb. 11) $A_1 = \frac{1}{2}M\beta$ mit $\beta_1 = \frac{M\,a}{E\,f\,e} = \varphi_1$. Die innere Arbeit, mit $\lambda = (e + y)\,\beta$, ergibt ebenfalls

$$A_1 = \int\frac{1}{2}\lambda\sigma\,df = \int\frac{1}{2}\beta\,(e + y)\,\sigma\,df = \frac{1}{2}\beta\left(e\int\sigma\,df + \int y\cdot\sigma\,df\right) = \frac{1}{2}\beta\,M\,.$$

Es kommt hier wesentlich auf das gegenseitige Verhältnis der Arbeitsgrößen an:

$$A_1 : A_0 = \varphi_1 : \varphi_0 = \frac{M\,a}{2\,E\,f\,e} : \frac{M\,r\,a}{2\,E\,f\,k^2} = \frac{k^2}{r\,e}\,.$$

Bei parabolischer Verbiegung der Querschnitte nach Abschnitt II (Abb. 12) war $\lambda = \frac{M a}{E J}(r y + y^2)$ und $\sigma = \frac{M}{J} y$; damit wird

$$A_2 = \frac{M^2 a}{2 E J^2} \int (r y^2 + y^3)\, d f \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} = \frac{\varphi_2}{\beta_2} = 1 + \frac{1}{J r} \int y^3\, d f,$$

ein Wert, der von 1 aus sich proportional mit $x \left(\text{oder } \frac{e_1}{r}\right)$ ändert, neben $\beta_2 = \frac{M r a}{E J} = \varphi_0$.

Für hyperbolische Verbiegung, Abschnitt III (Abb. 13), findet sich $\frac{A_3}{A_0} = \frac{\varphi_3}{\varphi_0}$ $= \frac{k^2}{r e}\left(2 - \frac{r^2}{f} \int \frac{d f}{(R + y)^2}\right)$, neben $\beta_3 = \varphi_0 \frac{k^2}{r e}$. In der Berechnung mit $\sigma = \frac{M}{f e} \frac{e + y}{R + y}$ und $\lambda = \beta\left(y + \frac{e r}{R + y}\right)$ kann man setzen $A_3 = \frac{\beta}{2}\left[\int y \sigma\, d f + M \frac{r}{f} \int \frac{(r + e + y)\, d f}{(R + y)^2} - M \frac{r}{f} \int \frac{r\, d f}{(R + y)^2}\right]$; hierin ist $\int y \cdot \sigma\, d f = M$; $\int \frac{d f}{R + y} = \frac{f}{r}$ und $\beta = \frac{M a}{E f e}$.

Die nach den Formeln für die einzelnen Querschnitte berechneten Zahlenwerte sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt. Sie sollten je für $x = 0$ und $^1/_2$ und 1 gesucht werden; für $x = e_1/r = 0$ oder $r = \infty$ sind alle Werte $= 1$ und nicht aufgeführt; statt $x = {}^1/_2$ ist das anschaulichere Maß $r = h$ gewählt worden; $x = 1$ oder $r = e_1$ stellt den Grenzwert der Krümmung dar.

		$\varphi_2 : \beta_2$		$\varphi_3 : \beta_3$		$A_1 : A_0$		$A_2 : A_0$		$A_3 : A_0$		$A_3 : A_2$	
Abb.	$\frac{e_1}{h}$	$r =$ h	e_1	h	e_1	h	e_1	h	e_1	h	e_1	h	e_1
1	$^1/_2$	1	1	0,93	0,67	0,93	0,50	1	1	0,93	0,67	0,93	0,67
2	$^1/_2$	1	1	0,91	0,62	0,93	0,33	1	1	0,93	0,66	0,93	0,66
3	$^5/_{12}$	1,09	1,22	0,94	0,63	1,03	0,44	1,09	1,22	1,04	0,80	0,95	0,65
4	$^7/_{12}$	0,91	0,84	0,90	0,62	0,83	0,22	0,91	0,84	0,83	0,54	0,92	0,64
5	$^1/_3$	1,13	1,40	0,96	0,65	1,08	0,50	1,13	1,40	1,08	0,90	0,95	0,64
6	$^2/_3$	0,87	0,80	0,92	0,72	0,79	0,50	0,87	0,80	0,79	0,56	0,91	0,70
7	0,45	1,07	1,16	0,95	0,67	0,97	0,59	1,07	1,16	0,98	0,77	0,91	0,66

Je größer die Zahlen für $A : A_0$ sind, um so größer ist auch die Durchbiegung des Stabes im Winkelmaß. Das trifft besonders für die nach außen verjüngten Querschnitte Abb. 3, 5 und 7 zu, bei denen die Spannungen mäßig bleiben. Es gilt auch in höherem Maße für die parabolische Verbiegung mit A_2 als für die hyperbolische mit A_3.

V. Schluß. Die letzte Berechnung bietet einen Anhalt zur Beantwortung der noch offenen Frage, welche von den angenommenen Spannungsverteilungen anzuwenden ist. Dazu dient folgende Betrachtung der Biegungsvorgänge.

Eine gegebene Last ist stets bestrebt, die tiefstmögliche Lage einzunehmen; so strebt auch ein gegebenes Moment eine möglichst große Durchbiegung oder Drehung φ des krummen Stabes an. Von verschiedenen Spannungszuständen wird also derjenige am stabilsten sein, der den stärksten Ausschlag φ bietet. Nach der in der Übersicht angefügten Schlußreihe ist φ_3 durchweg kleiner als φ_2; darum hat die zu φ_2 gehörige Spannungsverteilung bei parabolischer Verbiegung der Querschnitte als die stabilere das Vorrecht. Dazu kommt die Beachtung, daß hierbei, wegen der gleichmäßig linearen Spannungsänderung, die gegenseitige Beeinflussung der benachbarten Fasern am günstigsten ausfällt.

Anders liegen die Umstände, wenn nicht eine gegebene Last einspielt, sondern wenn eine gewisse Durchbiegung erzwungen wird, etwa durch Einspannen zwischen unnachgiebigen Anschlägen. In diesem Falle hat diejenige Formänderung und Spannungsverteilung die größere Wahrscheinlichkeit, bei der das Gesamtmoment und die aufzuwendende Arbeit am geringsten ist, also die hyperbolische Verbiegung der Querschnitte.

In der Praxis wird man hiernach in der Regel mit der einfachen Berechnungsweise nach Abschnitt II auskommen. 326

Zur praktischen Behandlung von Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten.

Von *Rudolf Iglisch* in Aachen.

In dieser Note soll ein praktisch brauchbares Verfahren zur näherungsweisen Lösung ziemlich allgemeiner Randwertaufgaben zweiter und vierter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten — wie sie etwa bei Saiten- und Stabschwingungen auftreten — angegeben werden. Das Verfahren, das im Prinzip schon von R. v. Mises auf das Problem der schwingenden Saite mit parabolischer Massenverteilung angewandt wurde[1]), besteht in der näherungsweisen Aufstellung der Resolvente des Randwertproblems in der Fredholmschen Form. Ein besonderer Vorteil bei der Bestimmung der Eigenwerte liegt darin, daß man mit jeder gewünschten Genauigkeit die charakteristische Gleichung selbst explizit erhalten kann, also nicht erst bei guten Näherungen Determinanten hohen Grades aufzulösen braucht. Durch Aufstellen der Resolvente lassen sich weiterhin besonders einfach inhomogene Probleme der Art lösen, wie sie etwa bei Schwingungen von Saiten oder Stäben auftreten, die durch eine Reihe periodischer Einzelkräfte erzwungen werden.

1. Stellung der Aufgabe, mathematische Hilfsmittel. Es soll das Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + q(x)\, y = \varphi(x) + \lambda\, r(x)\, y \quad \ldots \quad (1)$$

untersucht werden bei Randbedingungen der Form (die hier getroffene Wahl der Intervallenden bedeutet keine Spezialisierung)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y(-a) + \alpha_2 y'(-a) &= 0 \\ \beta_1 y(a) \quad + \beta_2 y'(a) \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2).$$

Dabei sei etwa $0 < a < \frac{1}{2}$ angenommen; $q(x)$ und $r(x)$ seien im Intervall $-a \leq x \leq a$ analytische Funktionen und es sei etwa noch vorausgesetzt, daß die Entwicklungen um die Intervallenden

$$\left.\begin{aligned} q(x) &= \sum q_\nu (a+x)^\nu = \sum q_\nu' (a-x)^\nu \\ r(x) &= \sum r_\nu (a+x)^\nu = \sum r_\nu' (a-x)^\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

für $|a+x| \leq 1$ bzw. $|a-x| \leq 1$ absolut und gleichmäßig konvergieren. $\varphi(x)$ sei eine für $-a \leq x \leq a$ etwa stückweise stetige Funktion, α_1, α_2, β_1, β_2 gewisse Konstante.

Unter Einführung der zum Differentialausdruck

$$L(y) = \frac{d^2 y}{d x^2} + q(x)\, y \quad \ldots \quad (4)$$

und den Randbedingungen (2) gehörenden symmetrischen Greenschen Funktionen $G(x, \zeta)$

$$G(x, \zeta) = G(\zeta, x) \quad \ldots \quad (5)$$

ist unser Problem (1), (2) gleichbedeutend mit der Lösung der Integralgleichung[2])

$$y(x) - \lambda \int G(x, \zeta)\, r(\zeta)\, y(\zeta)\, d\zeta = f(x) \quad \ldots \quad (6),$$

das Integral wie alle folgenden zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ erstreckt; dabei ist

$$f(x) = \int G(x, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \quad \ldots \quad (7)$$

gesetzt.

[1]) Frank-v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl., Braunschweig (Vieweg) 1930, Kap. XIII, § 1.

[2]) Vgl. etwa Kap. XIII, § 2 des in Anm. 1 genannten Buches. Man kann in unserem Fall übrigens immer mit der einfachen (nicht „erweiterten") Greenschen Funktion auskommen, wenn man im Bedarfsfalle etwa ein gewisses Vielfaches von $r(x)$ in $q(x)$ hineinnimmt.

Aus der Theorie der linearen Integralgleichungen werden die folgenden elementaren Ergebnisse benutzt:

I. Die Lösung von (6) ist in der Form

$$y(x) = f(x) + \lambda \int \Gamma(x, \zeta; \lambda) f(\zeta)\, d\zeta \quad \ldots \quad (8)$$

darstellbar mit

$$\Gamma(x, \zeta; \lambda) = \frac{D(x, \zeta; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{d_0(x,\zeta) + \lambda d_1(x,\zeta) + \lambda^2 d_2(x,\zeta) + \cdots}{d_0 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \cdots} \quad \ldots \quad (9)$$

(lösender Kern zum Kern

$$K(x, \zeta) = G(x, \zeta) \cdot r(\zeta) \quad \ldots \quad (10),$$

der in (6) auftritt), wenn nur die $d_m(x, \zeta)$ und die d_n der folgenden Rekursionsformel genügen[3])

$$d_m(x, \zeta) = d_m K(x, \zeta) + \int K(x, \varrho)\, d_{m-1}(\varrho, \zeta)\, d\varrho \quad \ldots \quad (11)$$

und wenn in (9) Zähler und Nenner konvergieren (der Zähler gleichmäßig in x und ζ).

II. Setzt man den lösenden Kern (9) in der Fredholmschen Form an, so sind die Nullstellen des Nenners die Eigenwerte der vorgelegten Integralgleichung, und an diesen Nullstellen besitzt $\Gamma(x, \zeta; \lambda)$ als Funktion von λ einen Pol.

III. Die Zählerreihe des Fredholmschen lösenden Kerns kann man gliedweise nach x und ζ differenzieren; die gleichmäßige und absolute Konvergenz der formal abgeleiteten Reihe zeigt man genau wie die der Zählerreihe selbst mit dem Hadamardschen Determinantensatz.

IV. Zwischen $K(x, \zeta)$ und $\Gamma(x, \zeta)$ aus (9) besteht die Beziehung

$$\Gamma(x, \zeta) - \lambda \int K(x, \varrho)\, \Gamma(\varrho, \zeta)\, d\varrho = K(x, \zeta) \quad \ldots \quad (12).$$

2. Ansatz für den lösenden Kern. Wir stellen zunächst fest: $d_m(x, \zeta)$ ist bis auf den Faktor $r(\zeta)$ symmetrisch in x und ζ, d. h.

$$\frac{d_m(x, \zeta)}{r(\zeta)} = \frac{d_m(\zeta, x)}{r(x)} \quad \ldots \quad (13).$$

Der Beweis folgt aus (11) durch vollständige Induktion, da nach (10) und (5) für

$$d_0(x, \zeta) = d_0 K(x, \zeta) \quad \ldots \quad (14)$$

(13) wegen (11) zu Recht besteht; man beweise dabei gleichzeitig die folgende Formel mit:

$$\int G(\zeta, \varrho)\, d_m(x, \varrho)\, d\varrho = \int G(x, \varrho)\, d_m(\zeta, \varrho)\, d\varrho .$$

Aus (11) folgt weiter wegen der Eigenschaften der Greenschen Funktion

$$\frac{\partial^2 d_m(x, \zeta)}{\partial x^2} + q(x)\, d_m(x, \zeta) = r(x)\, d_{m-1}(x, \zeta) \quad \ldots \quad (15),$$

wobei für spätere Zwecke gleich noch die bei der ersten Differentiation erhaltene Sprungbeziehung angemerkt werden soll:

$$\left[\frac{\partial d_m(x, \zeta)}{\partial x}\right]_{x=\zeta+0} - \left[\frac{\partial d_m(x, \zeta)}{\partial x}\right]_{x=\zeta-0} = r(\zeta)\, d_m \quad \ldots \quad (16).$$

$d_m(x, \zeta)$ selbst ist für $x = \zeta$ stetig.

Aus (15) und (13) folgt, daß $d_m(x, \zeta)$ für $x < \zeta$ und für $x > \zeta$ je eine analytische Funktion in x und ζ ist, da die Aussage für $d_0(x, \zeta)$ wegen (14) richtig ist. Da nach (11) alle $d_m(x, \zeta)$ den Faktor $r(\zeta)$ enthalten, setzen wir

$$d_m(x, \zeta) = P_m(x, \zeta) \cdot r(\zeta) \quad \ldots \quad (17),$$

[3]) Vgl. Kap. XII, § 2 des in Anm. 1 genannten Buches.

wo jetzt die $P_m(x, \zeta)$ für $x < \zeta$ und $x > \zeta$ analytische Funktionen sind und wegen (13)

$$P_m(x, \zeta) = P_m(\zeta, x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

gilt. Wir werden so auf den Ansatz

$$P_m(x, \zeta) = \left.\begin{matrix} \sum\limits_{\iota, \varkappa}^{0, 1, \ldots} A_{\iota, \varkappa}^{(m)} (a + x)^{\iota} \, (a - \zeta)^{\varkappa} \quad \text{für } x \leqq \zeta \\ \sum\limits_{\iota, \varkappa}^{0, 1, \ldots} A_{\varkappa, \iota}^{(m)} (a - x)^{\iota} \, (a + \zeta)^{\varkappa} \quad \text{für } x \geqq \zeta \end{matrix}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

geführt.

Die Rekursionsformel (15) kann zur (zunächst formalen) Bestimmung der $A_{\iota, \varkappa}^{(m)}$ benutzt werden. Einsetzen von (19) und Koeffizientenvergleich liefert unter Beachtung von (3):

$$\left.\begin{matrix} \iota(\iota - 1) A_{\iota, \varkappa}^{(m)} + \sum\limits_{\nu = 0}^{\iota - 2} A_{\nu, \varkappa}^{(m)} q_{\iota - 2 - \nu} = \sum\limits_{\nu = 0}^{\iota - 2} A_{\nu, \varkappa}^{(m-1)} r_{\iota - 2 - \nu} \\ \varkappa(\varkappa - 1) A_{\iota, \varkappa}^{(m)} + \sum\limits_{\nu = 0}^{\varkappa - 2} A_{\iota, \nu}^{(m)} q'_{\varkappa - 2 - \nu} = \sum\limits_{\nu = 0}^{\varkappa - 2} A_{\iota, \nu}^{(m-1)} r'_{\varkappa - 2 - \nu} \end{matrix}\right\} \quad \ldots, \ldots \quad (20).$$

Die erste dieser Formeln errechnet $A_{\iota, \varkappa}^{(m)}$ aus den $A_{\nu, \varkappa}^{(m)}$ und $A_{\nu, \varkappa}^{(m-1)}$ mit $\nu \leqq \iota - 2$, falls $\iota > 1$ ist, da $A_{\iota, \varkappa}^{(m)}$ als Koeffizienten $\iota(\iota - 1)$ besitzt; die zweite errechnet bei festem ι ebenso $A_{\iota, \varkappa}^{(m)}$ aus den $A_{\iota, \nu}^{(m)}$ und $A_{\iota, \nu}^{(m-1)}$ mit $\nu \leqq \varkappa - 2$.

Durch die Rekursionsformeln (20) läßt sich im allgemeinen jedes $A_{\iota \varkappa}^{(m)}$ in zweifacher Weise aus endlich vielen $A_{\mu \nu}^{(m-1)}$ berechnen, indem man entweder den vorderen oder den hinteren unteren Index festhält. Dadurch entsteht eine Reihe von Beziehungen zwischen den $A_{\iota \varkappa}^{(m)}$, die aber hier nicht weiter interessieren. Wichtig ist, daß, wie schon bemerkt, beide Formeln nur für $\iota > 1$ bzw. $\varkappa > 1$ anwendbar sind, so daß alle $A_{00}^{(m)}$, $A_{01}^{(m)}$, $A_{10}^{(m)}$ und $A_{11}^{(m)}$ durch (20) völlig unbestimmt bleiben. Da $K(x, \zeta)$ in x die Randbedingungen (2) erfüllen muß, wegen (11) also auch jedes $d_m(x, \zeta)$, so hat man noch

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 A_{0 \varkappa}^{(m)} + \alpha_2 A_{1 \varkappa}^{(m)} = 0 \\ \beta_1 A_{\varkappa 0}^{(m)} - \beta_2 A_{\varkappa 1}^{(m)} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

wonach sich für $\alpha_1 \neq 0$ und $\beta_1 \neq 0$ unter anderem für $\varkappa = 0$ und 1 Formeln zur Zurückführung von $A_{01}^{(m)}$, $A_{10}^{(m)}$ und $A_{00}^{(m)}$ auf die noch einzig willkürlich bleibende Größe $A_{11}^{(m)}$ ergeben. In jedem Falle können für ein $\alpha_\nu \neq 0$ und ein $\beta_\mu \neq 0$ $(\nu, \mu = 1, 2)$, da in jedem Falle die Koeffizientenmatrix der vier Gl. (21) für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$ den Rang 3 besitzt, die $A_{00}^{(m)}$, $A_{01}^{(m)}$, $A_{10}^{(m)}$, $A_{11}^{(m)}$ linear durch eine von ihnen ausgedrückt werden. Ich schließe im folgenden so, als ob sie sich auf $A_{11}^{(m)}$ zurückführen ließen, doch ist diese Annahme tatsächlich belanglos.

Diese willkürliche Größe $A_{11}^{(m)}$ läßt sich nun nicht in einfacher Weise bestimmen; es lassen sich nur einige sie enthaltende äußerst komplizierte Summenformeln angeben, mit denen sich aber praktisch nicht operieren läßt[4]). Diese Unbestimmtheit von $A_{11}^{(m)}$ hängt damit zusammen, daß Zähler und Nenner von (9) nur bis auf einen Faktor bestimmt sind, der selbst eine Potenzreihe in λ sein kann. Wir werden daher in anderer Weise weiterschließen.

Zunächst sei bemerkt, daß, nachdem durch Errechnung aller $A_{\iota \varkappa}^{(m)}$ die Zählerreihe in (9) formal bestimmt ist, sich die Nennerreihe am einfachsten ergibt, indem man etwa in der nur scheinbar von ζ abhängigen Formel (16) $\zeta \to -a$ rücken läßt. Man erhält so

$$d_m = -\sum_{\varkappa = 0}^{\infty} (2a)^{\varkappa} A_{1 \varkappa}^{(m)} - \sum_{\iota = 1}^{\infty} \iota A_{0 \iota}^{(m)} (2a)^{\iota - 1} \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

---

[4]) Vgl. Formel (9) auf S. 558 des in Anm. 1 genannten Buches.

3. Bestimmung der bisher willkürlichen Koeffizienten. Wir wollen uns jetzt mit den noch fraglichen Größen $A_{11}^{(m)}$ beschäftigen. Zunächst ist sicher $A_{11}^{(0)}$ eine völlig belanglose Größe, solange $A_{11}^{(0)} \neq 0$ angenommen wird. Eine Änderung von $A_{11}^{(0)}$ bewirkt nur eine Änderung der Konstanten d_0 in (14). Ich nehme also z. B.

$$A_{11}^{(0)} = 1$$

an. Man wird nun zunächst einmal versucht sein, über die $A_{11}^{(m)}$ für $m > 0$ die einfachste mögliche Annahme zu machen, d. h. man wird sie zunächst alle gleich 0 setzen und dann später zusehen, wie von Null verschiedene $A_{11}^{(m)}$ das so erhaltene Resultat verändern. Nehmen wir also zunächst alle $A_{11}^{(m)} = 0$ an für $m > 0$, so lassen sich nach (20) und (21) alle $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$ sukzessive berechnen aus dem einzigen angenommenen Wert $A_{11}^{(0)} = 1$. Bei der Berechnung der $A_{\iota\varkappa}^{(0)}$ sind dabei alle $A_{\iota\varkappa}^{(-1)} = 0$ zu setzen; denn $d_0(x, \zeta) = d_0 \cdot K(x, \zeta)$ genügt der Gl. (15) mit der rechten Seite Null. Auf diese Weise erhalten wir für (9) formal eine Darstellung der Form

$$\Gamma^*(x, \zeta; \lambda) = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^*(x, \zeta)\, \lambda^\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^*\, \lambda^\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Wir wissen, daß $\Gamma^*(x, \zeta; \lambda)$ als lösender Kern in (8) brauchbar ist, wenn Zähler und Nenner absolut konvergieren (bzw. gleichmäßig). Dies werden wir später beweisen, zunächst wollen wir es annehmen. Wir wissen aber noch nicht, daß wir durch Nullsetzen des Nenners von (23) genau die Eigenwerte unserer Integralgleichung (6) erhalten. Dazu überlegen wir folgendes: Bei einer gewissen Wahl der vorhin willkürlich gleich Null gesetzten $A_{11}^{(m)}$ muß gerade der Fredholmsche Wert für den lösenden Kern $\Gamma(x, \zeta; \lambda)$ herauskommen, etwa für $A_{11}^{(m)} = B_m$ $(m \geqq 1)$. Setze ich zunächst alle $A_{11}^{(m)} = 0$ für $m > 1$ und $A_{11}^{(1)} = B_1$, so erhalte ich aus (20) und (21) statt (23) formal

$$\Gamma^{**}(x, \zeta; \lambda) = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^*(x, \zeta)\, \lambda^\nu (1 + B_1 \lambda)}{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^*\, \lambda^\nu (1 + B_1 \lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24);$$

denn die zu den schon vorhandenen $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$ wegen $A_{11}^{(1)} = B_1$ hinzukommenden Zusatzwerte rechnen sich wegen der Linearität des Problems aus diesem $A_{11}^{(1)}$ genau so, wie sich die schon vorhandenen $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$ aus $A_{11}^{(0)}$ rechneten. Wir erhalten daher zu unseren früheren $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$ Zusatzgrößen der gleichen Form, die alle mit $A_{11}^{(1)} = B_1$ multipliziert sind, und unter Beachtung des wegen $m = 1$ noch auftretenden Faktors λ bekommt man als lösenden Kern genau (24). Ebenso erhält man für den Fredholmschen lösenden Kern formal die folgende Darstellung:

$$\Gamma(x, \zeta; \lambda) = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^*(x, \zeta)\, \lambda^\nu \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \lambda^\nu\right)}{\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^*\, \lambda^\nu \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \lambda^\nu\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Zunächst folgt aus den in III gemachten Bemerkungen, daß $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \lambda^\nu$ für alle λ absolut konvergiert; denn diese Summe ist gerade gleich

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \zeta}\left(\frac{D(x, \zeta; \lambda)}{r(\zeta)}\right)_{\substack{x = -a \\ \zeta = a}}.$$

Wir können also (25) durch die dem Zähler und Nenner gemeinsame Klammer kürzen und erhalten mit Berücksichtigung von II [Nennernullstellen des Fredholmschen lösenden Kerns liefern einen Pol von (25)] das Resultat: Selbst wenn (23) nicht der genaue Fredholmsche

lösende Kern ist, so hat er doch die fundamentalen Eigenschaften der Fredholmschen Resolvente: durch Nullsetzen der Nennerreihe erhält man die Eigenwerte der Integralgleichung; an den Nullstellen hat (23) einen Pol. Dies gilt natürlich nur, wenn bewiesen ist, daß Zähler- und Nennerreihe absolut (bzw. gleichmäßig) konvergieren.

4. Konvergenzbeweis. Um dies zu beweisen, formen wir die Zählerreihe in (23) um in ein Produkt aus zwei Faktoren, von denen der eine nur von x, der andere nur von ζ abhängt. Die Betrachtung sei hier etwa für $x \leqq \zeta$ durchgeführt.

Ich will mir formal alle Glieder von $D^*(x, \zeta; \lambda)$ zusammensuchen, die mit einer bestimmten Potenz $(a+x)^\iota$ multipliziert sind. Dazu habe ich alle Koeffizienten $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$ zu berücksichtigen bei festem ι und variablem $\varkappa$ und m. Alle diese $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$ errechnen sich aber mit Hilfe der zweiten Formeln (20) und (21) durch eine bestimmte lineare Rechenoperation aus den $A_{\iota 1}^{(m)}$, und zwar sind diese Rechenoperationen von ι und m unabhängig, da in diese Formeln ι und m nur als Indizes eingehen und nicht als Zahlenwerte in die Koeffizienten, wie dies beim zweiten unteren Index $\varkappa$ der Fall ist. Daraus folgt, daß $D^*(x, \zeta; \lambda)$ formal die folgende Gestalt besitzt:

$$D^*(x, \zeta; \lambda) = r(\zeta) \sum_\iota \sum_m (a+x)^\iota A_{\iota 1}^{(m)} \lambda^m \cdot Q(a-\zeta, \lambda),$$

wo $Q(a-\zeta, \lambda)$ eine Potenzreihe in $a-\zeta$ und λ bedeutet. Eine gleiche Überlegung liefert die Darstellung

$$D^*(x, \zeta; \lambda) = r(\zeta) \sum_{\iota\, m} (a+x)^\iota A_{\iota 1}^{(m)} \lambda^m \sum_{\varkappa\, m} (a-\zeta)^\varkappa A_{1\varkappa}^{(m)} \lambda^m \quad (x \leqq \zeta) \quad . \quad . \quad (26).$$

Daß nicht noch ein weiterer — evtl. von λ abhängender — Faktor hinzukommt, zeigt die Betrachtung der Summanden mit $\iota = \varkappa = 1$, von denen abgesehen von dem Faktor $r(\zeta)$ nach unseren Annahmen nur der Ausdruck

$$A_{11}^{(0)}(a+x) \cdot A_{11}^{(0)}(a-\zeta) = 1 \cdot (a+x) \cdot (a-\zeta)$$

übrigbleiben darf und tatsächlich übrigbleibt.

Der in Rede stehende Konvergenzbeweis wird geführt sein, wenn ich zeige, daß

$$\sum_\iota \sum_m (2a)^\iota \bar{A}_{\iota 1}^{(m)} \lambda^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

für alle positiven λ konvergiert, wobei $\bar{A}_{\iota 1}^{(m)}$ den absoluten Betrag von $A_{\iota 1}^{(m)}$ bedeuten soll. Der gleiche Beweis gilt dann für den zweiten Faktor in (26) und zugleich folgt, daß die bisher vorgenommenen Umordnungen von Reihengliedern berechtigt waren.

Aus der ersten Gl. (20) folgt, wenn $\bar{q}_\nu$ und $\bar{r}_\mu$ die absoluten Beträge von q_ν bzw. r_μ bezeichnen,

$$\iota(\iota-1)\, \bar{A}_{\iota 1}^{(m)} \leqq \sum_{\nu=0}^{\iota-2} \bar{A}_{\nu 1}^{(m)} \bar{q}_{\iota-2-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\iota-2} \bar{A}_{\nu 1}^{(m-1)} \bar{r}_{\iota-2-\nu}\,.$$

Bedeutet

$$A_\iota^{(m)} = \operatorname*{Max}_{\varkappa = 1, 2, \ldots \iota} \left(\bar{A}_{\varkappa 1}^{(m)},\ \bar{A}_{\varkappa 1}^{(m-1)}\right),$$

so wird weiter

$$\iota(\iota-1)\, \bar{A}_{\iota 1}^{(m)} \leqq \sum_{\nu=0}^{\iota-2} (\bar{q}_\nu + \bar{r}_\nu)\, A_{\iota-2}^{(m)} < S \cdot A_{\iota-2}^{(m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

wo

$$S > \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{q}_\nu + \bar{r}_\nu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

eine endliche Zahl bedeutet. Für

$$(\tau-2)(\tau-1) \geqq S \qquad (\tau \text{ kleinster Index dieser Art}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

sind demnach alle

$$\bar{A}_{\tau+\varrho, 1}^{(m)} < A_{\tau-2}^{(m)} \quad \varrho = 0, 1, 2 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Sei jetzt

$$A^{*(m)}_\sigma = \operatorname*{Max}_{\substack{\varkappa = 0 \ldots \sigma \\ \mu = 0 \ldots m}} \left(\bar{A}_{\varkappa 1}^{(\mu)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

gesetzt, so erhält man sukzessiv aus (31):

$$\left.\begin{array}{l} \bar{A}^{(0)}_{\tau+\varrho,1} < A^{*(0)}_{\tau-2} \\ \bar{A}^{(1)}_{\tau+\varrho,1} < A^{*(1)}_{\tau-2} \\ \vdots \\ \bar{A}^{(m)}_{\tau+\varrho,1} < A^{*(m)}_{\tau-2} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33).$$

Das ist eine sehr rohe Abschätzung. $A^{*(m)}_{\tau-2}$ ist aber sicher kleiner als eine gewisse endliche von m unabhängige Zahl A^*. Zu diesem Zweck zeige ich nämlich, daß es einen Index σ gibt, für den alle

$$\bar{A}^{(\sigma+\nu)}_{\mu,1} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots, \quad \mu = 0, 1, \ldots \tau - 2) \quad \ldots \quad (34)$$

sind. Ich benutze dazu wieder die ersten Gl. (20) und (21). Es ist $A^{(0)}_{11} = 1$, und daher können auch alle übrigen $A^{(0)}_{\iota 1}$ von Null verschiedene Werte besitzen. Weiter ist $A^{(1)}_{11} = 0$ und daher nach (21) auch $A^{(1)}_{01} = 0$. Die $A^{(1)}_{\nu 1}$ mit $\nu \geq 2$ ergeben sich aus (20) und können ungleich Null sein. Wie eben folgt $A^{(2)}_{01} = A^{(2)}_{11} = 0$. Jetzt aber aus (20) $A^{(2)}_{21} = A^{(2)}_{31} = 0$. Allgemein folgt so für $m > 0$:

$$A^{(m)}_{\mu 1} = 0 \quad \text{für } \mu = 0, 1, \ldots 2m - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35).$$

Es genügt also,

$$\sigma \geq \frac{\tau - 1}{2}$$

zu wählen.

Nun folgt aus (28), (33), (34) und (35)

$$\bar{A}^{(\sigma)}_{\iota 1} < S A^* \frac{1}{(2\sigma - 1) 2\sigma}, \qquad \bar{A}^{(\sigma+1)}_{\iota 1} < A^* S^2 \frac{1}{(2\sigma - 1) 2\sigma (2\sigma + 1)(2\sigma + 2)},$$

schließlich allgemein

$$\bar{A}^{(\sigma+\mu)}_{\iota 1} < A^* S^{\mu+1} \frac{(2\sigma - 2)!}{(2\sigma + 2\mu)!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36).$$

Also kann man, wenn man

$$E(\lambda) = A^* \frac{1}{1 - 2a} \sum_{m=0}^{\sigma-1} \lambda^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

setzt, (27) so abschätzen:

$$\sum_{\iota} \sum_{m} (2a)^{\iota} \bar{A}^{(m)}_{\iota 1} \lambda^m < E(\lambda) + \frac{A^* (2\sigma - 2)!}{1 - 2a} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\sigma+\mu} S^{\mu+1}}{(2\sigma + 2\mu)!} \quad \ldots \ldots \quad (38).$$

Da die Summe für alle endlichen Werte von λ konvergiert, ist der gewünschte Konvergenzbeweis geliefert.

5. Praktische Durchführung der Rechnung. Benötigt man nur einige der ersten Eigenwerte des Problems (1), (2), bzw. der Integralgleichung (6), so braucht man nur aus $A^{(0)}_{11} = 1$ und den zweiten Rekursionsformeln (20) und (21) eine gewisse Anzahl von Größen $A^{(m)}_{1\varkappa}$ und $A^{(m)}_{0\varkappa}$ zu berechnen, aus diesen nach (22) die d_m, und hat dann in den nach irgendeinem Näherungsverfahren zu ermittelnden Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{m} d_m \lambda^m = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

deren Koeffizienten man so mit beliebiger Genauigkeit ohne große Mühe berechnen kann, sofort Näherungen für die gesuchten Eigenwerte.

Ist bei gegebenem λ das inhomogene Problem (1), (2) zu lösen, so hat man nach (20) und (21) genügend viele $A^{(m)}_{1\varkappa}$ und $A^{(m)}_{\varkappa 1}$ zu berechnen, ferner angenähert nach (22) den Wert

$$d(\lambda) = \sum_{m} d_m \lambda^m.$$

Die Lösung erscheint dann unter Benutzung von (26) und der analogen Formel

$$D^*(x, \zeta; \lambda) = r(\zeta) \sum_{\iota m} (a - x)^\iota A_{1\iota}^{(m)} \lambda^m \sum_{\varkappa m} (a + \zeta)^\varkappa A_{\varkappa 1}^{(m)} \lambda^m \quad (x \geqq \zeta) \quad . \quad . \quad (40)$$

wegen (8) in der Form

$$\left.\begin{aligned} y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{d(\lambda)} \Bigg[& \sum_{\iota m} (a - x)^\iota A_{1\iota}^{(m)} \lambda^m \int_{-a}^{x} \sum_{\varkappa m} (a + \zeta)^\varkappa A_{\varkappa 1}^{(m)} \lambda^m r(\zeta) f(\zeta) \, d\zeta \\ & + \sum_{\iota m} (a + x)^\iota A_{\iota 1}^{(m)} \lambda^m \int_{x}^{a} \sum_{\varkappa m} (a - \zeta)^\varkappa A_{1\varkappa}^{(m)} \lambda^m r(\zeta) f(\zeta) \, d\zeta \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41).$$

Diese Formel gestattet die Berechnung von $y(x)$ aus den sukzessiven Momenten des Produktes $r(x) f(x)$ in bezug auf die Intervallenden. Zum mindesten läßt sich in jedem Falle der Wert von $y(x)$ für vorgegebene Werte von x ohne große Mühe aus (41) mit ziemlicher Genauigkeit errechnen.

6. Vereinfachungen und Verallgemeinerungen. Eine wesentliche Rechenvereinfachung bedeutet es, wenn sich die je zwei Rekursionsformeln (20) und (21) auf je eine reduzieren, was etwa wie in dem Beispiel der schwingenden Saite mit symmetrischer Massenverteilung [5]) der Fall ist, wenn für jedes $\varkappa$

$$A_{1\varkappa}^{(m)} = A_{\varkappa 1}^{(m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

gilt. Dazu ist zunächst jedenfalls notwendig, daß in (21) die Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

ausfällt. Weiter folgt wegen (26) und (40) notwendig für das Bestehen von (42)

$$P_m(x, \zeta) = P_m(-x, -\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Das gilt zunächst sicher für den Index $m = 0$, wenn wegen (10)

$$P_0(x, \zeta) = K(x, \zeta) : r(\zeta) = G(x, \zeta)$$

die gleiche Eigenschaft für $G(x, \zeta)$ richtig ist:

$$G(x, \zeta) = G(-x, -\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Zum Bestehen von (45) benötigt man neben (43) noch

$$q(x) = q(-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Mit Benutzung von (15) und (17) folgt ebenso die Richtigkeit von (44) sukzessive für alle übrigen Werte von m, wenn noch

$$r(x) = r(-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

gefordert wird. Die Bedingungen (43), (46) und (47) sind tatsächlich bei einigen vorkommenden praktischen Fällen erfüllt.

Eine in der Praxis wohl immer vorliegende wesentliche Rechenvereinfachung ergibt sich, wenn die Funktionen $q(x)$ und $r(x)$ in (1) Polynome nicht zu hohen Grades sind. Dann bleiben in den Rekursionsformeln (20) nur wenige Glieder stehen und die Berechnung der $A_{1\varkappa}^{(m)}$ und $A_{\varkappa 1}^{(m)}$ erleichtert sich ungemein. Auch der Konvergenzbeweis **4** läßt sich dann nach dem Muster von Kap. XIII, § 1, **3** des in Anm. 1 genannten Buches etwas vereinfachen.

Hat man statt $-a$ und a als Intervallenden zwei beliebige Zahlen a und $b > a$ und konvergieren die Entwicklungen von $q(x)$ und $r(x)$ um die Intervallenden absolut für $|b - x| \leqq c$ bzw. $|x - a| \leqq c$ mit $c > b - a$, so setze man die Entwicklung (19) an nach fortschreitenden Potenzen von $\dfrac{x - a}{c}$ und $\dfrac{b - x}{c}$.

Eine in der Praxis oft benötigte Erweiterung der bisherigen Ausführungen liefert die Betrachtung der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x) \, y = \varphi(x) + \lambda \, r(x) \, y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

[5]) Vgl. Anm. 1.

unter den gleichen Randbedingungen (2). Dabei sei angenommen, daß die Entwicklungen

$$p(x) = \sum p_\nu (a+x)^\nu = \sum p'_\nu (a-x)^\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

für $|a+x| \leqq 1$ bzw. $|a-x| \leqq 1$ absolut und gleichmäßig konvergieren, ebenso wie die gleichen Entwicklungen für die Funktion $\frac{1}{p(x)}$, die etwa überall als positiv angenommen werden kann. An die Stelle der Rekursionsformeln (20) treten jetzt die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} (\iota-1)\sum_{\nu=0}^{\iota} \nu\, A_{\nu\varkappa}^{(m)}\, p_{\iota-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\iota-2} A_{\nu\varkappa}^{(m)}\, q_{\iota-2-\nu} &= \sum_{\nu=0}^{\iota-2} A_{\nu\varkappa}^{(m-1)}\, r_{\iota-2-\nu} \\ (\varkappa-1)\sum_{\nu=0}^{\varkappa} \nu\, A_{\iota\nu}^{(m)}\, p'_{\varkappa-\nu} + \sum_{\nu=0}^{\varkappa-2} A_{\iota\nu}^{(m)}\, q'_{\varkappa-2-\nu} &= \sum_{\nu=0}^{\varkappa-2} A_{\iota\nu}^{(m-1)}\, r'_{\varkappa-2-\nu} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Da p_0 und p'_0 ungleich Null sind, gestatten diese Formeln wieder zusammen mit (21) die formale Berechnung sämtlicher $A_{\iota\varkappa}^{(m)}$. Der Beweis für die Konvergenz von (27) muß jetzt etwas abgeändert werden. Er sei nachstehend nur für den Fall $x \leqq \zeta$ kurz skizziert:

Man schreibe die erste für $\iota \geqq 2$ geltende Formel (50) so um, indem man gleich $\varkappa = 1$ einträgt:

$$\sum_{\nu=0}^{\iota} \nu\, A_{\nu 1}^{(m)}\, p_{\iota-\nu} = \frac{1}{\iota-1} \sum_{\nu=0}^{\iota-2} \left(A_{\nu 1}^{(m-1)}\, r_{\iota-2-\nu} - A_{\nu 1}^{(m)}\, q_{\iota-2-\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

Man bestätigt durch Koeffizientenvergleich, daß $\nu\, A_{\nu 1}^{(m)}$ der Koeffizient von $(x+a)^\nu$ ist in der Entwicklung von

$$\frac{1}{p(x)} \sum_{\varrho=2}^{\nu} b_\varrho^{(m)} (x+a)^\varrho \frac{1}{\varrho-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

nach Potenzen von $x+a$; dabei ist gesetzt

$$b_\varrho^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{\varrho-2} \left(A_{\nu 1}^{(m-1)}\, r_{\varrho-2-\nu} - A_{\nu 1}^{(m)}\, q_{\varrho-2-\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Für $m=0$, wo $A_{11}^{(0)} = 1$ ist, hat man in (52) noch das Zusatzglied $p_0 \cdot (x+a) : p(x)$ hinzuzunehmen. Unter Benutzung der in **4** eingeführten Bezeichnungen wird

$$\left| b_\varrho^{(m)} \right| \leqq S \cdot A_{\varrho-2}^{(m)},$$

daher nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz aus (52):

$$\nu\, \overline{A}_{\nu 1}^{(m)} \leqq \frac{S}{P} \cdot \sum_{\varrho=2}^{\nu} A_{\varrho-2}^{(m)} \frac{(2a)^\varrho}{\varrho-1} < S_1\, A_{\nu-2}^{(m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

mit der sehr rohen Schranke

$$S_1 \geqq \frac{S}{P} \cdot \sum_{\varrho=2}^{\infty} \frac{(2a)^\varrho}{\varrho-1};$$

P ist dabei die untere Grenze von $p(x)$ im Kreis mit dem Radius 1 um $x=-a$. Formel (54) spielt im Konvergenzbeweis die Rolle der Formel (28) in **4**. Jetzt verläuft der Konvergenzbeweis sinngemäß wie in **4** weiter. — Man könnte auch hier in (54) einen größeren Faktor vor $\overline{A}_{\nu 1}^{(m)}$ erzielen, wenn man beachtet, daß mit wachsendem m im Mittelglied das kleinste auftretende ϱ wächst; doch ist dies nicht nötig.

Das geschilderte Verfahren ist natürlich nicht auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränkt. Wortgetreu übertragen sich die Überlegungen z. B. auf die Gleichung vierter Ordnung der Stabschwingungen:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + q(x)\, y = \varphi(x) + \lambda\, r(x),$$

wo p, q, r und φ die gleichen Bedeutungen haben wie früher.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur Systematik von Multiplikationstafeln. Eine knappe Darstellung finden Multiplikationstafeln in Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen (Leipzig 1901), in dem Artikel „Numerisches Rechnen“ von Mehmke (in der französischen Ausgabe bearbeitet von d'Ocagne) in der Enzyklopädie der Mathematik sowie in Schrutka, Zahlenrechnen (Leipzig 1923).

Multiplikationstafeln enthalten unmittelbar die Produkte von zwei beliebigen natürlichen Zahlen x und y. Vielfach werden solche Tafeln als „Pythagoraeische Tafeln“ bezeichnet.

Sie dienen der Vereinfachung der Lösung von Multiplikations- und Divisionsaufgaben in Wirtschaft und Wissenschaft.

An den angeführten Stellen werden eine Reihe von Tafeln genannt[1]). Die zusammenfassenden Veröffentlichungen liegen bereits mehrere Jahrzehnte zurück, und leider findet sich nirgends eine systematische Darstellung der Tafeln nach den in ihnen angewendeten Grundsätzen. Diese Tatsache wurde bei der Erstattung eines Gutachtens in einer Klage auf Grund des Urhebergesetzes als ein außerordentlicher Mangel empfunden.

In der Annahme, daß die grundsätzlichen Ausführungen des Gutachtens und die Angabe auch von neueren Tafeln, die zum Teil recht geschickt zusammengestellt sind, allgemeineres Interesse finden, seien sie im nachstehenden mitgeteilt.

Bedauerlich war bei dieser Untersuchung, daß es unmöglich war, eine recht erhebliche Anzahl der oben angegebenen Tabellenwerke im deutschen Leihverkehr der Bibliotheken zu beschaffen.

Es ist selbstverständlich, daß heute eine neue Ausgabe einer Multiplikationstafel inhaltlich nichts Neues geben kann; ihr Verdienst kann nur in der Form und der Anordnung des Stoffes, wie in der strengen Korrektheit liegen.

Je nachdem, ob der Herausgeber beabsichtigt, seine Tabellen in der Wissenschaft oder Wirtschaft benutzen zu lassen, wird er eine gerade hierfür geeignete Anordnung, Form und Auswahl treffen. Jede brauchbare Rechen-Multiplikationstafel auf der Grundlage des Einmaleins hat doppelte Eingangsrichtungen, die zueinander senkrecht stehen.

Es werde der für eine Seite oder Spalte feststehende unveränderliche Faktor als Multiplikator (meist senkrechte Eingangsrichtung) der veränderliche Faktor als Multiplikand bezeichnet (waagerechte Eingangsrichtung). In der Tafel von J. Ernst ist die gleiche Bezeichnungsweise gewählt worden.

Der Umfang einer Tafel heißt zweimal-dreistellig, wenn die für eine Seite oder Spalte feststehenden ein- bis höchstens dreistellige Multiplikatoren mit ein- bis höchstens zweistelligen Multiplikanden multipliziert werden. Der Umfang der Tafel heißt dreimal-zweistellig, wenn die für eine Seite oder Spalte feststehenden ein- bis höchstens zweistelligen Multiplikatoren mit ein- bis höchstens dreistelligen Multiplikanden multipliziert werden.

Entsprechend dieser Erklärung treten Multiplikationstafeln mit folgendem Umfang auf:

a) Einmal-zwei-, -drei-, -vier- und -siebenstellig (sog. Rechenknechte oder Erleichterungstafeln),
b) Zweimal-zwei-, -drei- oder -vierstellig,
c) Dreimal-dreistellig,
d) Viermal-zweistellig.

Eine Tafel heißt vollständig, wenn es möglich ist, jeden der beiden Faktoren als Multiplikator und als Multiplikanden zu verwenden. In ihr tritt jedes Produkt doppelt auf. Ihr buchmäßiger Umfang ist erheblich. Durch die Tafel geht quer eine Symmetrieachse hindurch, die durch die Quadratzahlen gekennzeichnet ist. Gleiche Produkte stehen gleichweit von dieser Symmetrieachse entfernt.

Z	1	2	3	4	5 ..
1	1	2	3	4	5 ..
2	2	4	6	8	10 ..
3	3	6	9	12	15 ..
4	4	8	12	16	20 ..

Eine Tafel heißt abgekürzt, wenn jedes Produkt ihres Umfanges nur einmal auftritt. Jede Multiplikatorenreihe endet mit ihrer Quadratzahl (a) oder beginnt mit ihr (b), so daß folgende zwei Möglichkeiten für den Aufbau bestehen:

a)

Z	1	2	3	4	5 ..
1	1				
2	2	4			
3	3	6	9		
4	4	8	12	16	
5	5	10	15	20	25

b)

Z	1	2	3	4	5 ..
1	1	2	3	4	5 ..
2		4	6	8	10
3			9	12	15
4				16	20
5					25

Enthält eine Tafel nicht sämtliche Multiplikatoren ihres Umfanges, so heißt sie Auszugstafel.

Beispiel:

Z	1000	1005	1010	1015	1020 ..
2	1000	1005	1010	1015	1020 ..
.	.	.	.	.	. .
99	99000	99495	99990	100485	100980 ..

Eine Tafel, die innerhalb eines niederen Umfanges vollständig ist und auszugsweise Faktoren der nächsthöheren Stelle enthält, heißt kombinierte Auszugstafel.

Darstellung einer Reihe von Tafeln nach dieser Systematik:

1. Vollständige Tafeln.

a) Einmal-dreistellig:

1. Anhang zum Moment-Rechentabellenheft Ideal v. Ludwig Grosse, Klinga nach 1907.
2. Blitz, Faulenzer für Multiplikation und Division v. J. Bezold, Bamberg 1913.

[1]) J. Dodson, The Calculator, London 1747. — R. Picarte, Tables de multiplication . . ., Paris 1838. — Th. v. Esersky, Ausgeführte Multiplikationen und Divisionen, St. Petersburg-Leipzig 1874. — C. A. Brettschneider, Produktentafel, Hamburg-Gotha 1841. — S. L. Laundy, A table of products, London 1865. — J. Diakow, Multiplikationstabellen, St. Petersburg 1897. — A. L. Crelle, Erleichterungstafeln, Berlin 1836. — Ch. Z. Slonimsky, Jahrbuch für reine und angewandte Math. 30, 1847. — A. L. Crelle, Rechentafeln seit 1820, Berlin. — C. Cario und H. C. Schmidt, Zahlenbuch, Aschersleben 1896. — A. Henselin, Rechentafeln, Berlin 1897. — Ch. Hutton, Tables of the products and powers of numbers, London 1781. — C. L. Petrick, Multiplikationstabellen . . ., Libau 1875. — H. Zimmermann, Rechentafeln, Berlin 1889. — C. A. Müller, Multiplikationstabellen, Karlsruhe 1897. — L. Zimmermann, Rechentafeln, Liebenwerda 1895. — J. Riem, Rechentafel für Multiplikation und Division, Basel 1897. — J. de Mendiziabal y Tamborred, Tablas de multiplicar, Mexiko 1903. — Sämtlich bei Mehmke-d'Ocagne. — Bei Schrutka: Peters, Weiskircher und Kühfmann ohne weitere Angabe im Text.

3. Blitzrechentafel v. Carl Malcomes. Selbstverlag Nieder-Romstedt 1919.
4. Multiplikationstafel für unbeschränkte Faktoren v. J. Wachsmann, Wien 1924.
5. Multiplextafel v. Fr. Schneider, München 1911.

b) Einmal-vierstellig:
1. Produktentafel enthaltend die 2-, 3-...9fache aller Zahlen von 1 bis 100000 v. C. A. Brettschneider, Hamburg-Gotha 1849.

c) Einmal-siebenstellig:
1. Erleichterungstafel für jeden der zu Rechnen hat v. A. L. Crelle, Berlin 1836.

d) Zweimal-zweistellig:
1. Blitzrechner v. O. Beer, Eilenburg 1913.
2. Blitzrechner, Multiplikationstabelle v. O. Junga, Berlin 1928.
3. Blitzrechner v. Ringel, Kühtmann, Dresden 1914.
4. Dr. Chr. Ad. Rises Faulenzer, Stuttgart 1919.
5. Moment-Multiplikationstabelle v. H. Müller, Reutlingen 1920.
6. Mathematische und geodätische Hilfstafeln v. Dr. W. Jordan, Hannover 1895.

e) Zweimal-dreistellig:
1. A table of products v. Edwin Cornor, London-Bombay 1867.
2. Doppel-T-Tafel v. H. Weiskircher, Hannover 1914.
3. Der große Rechenschlüssel v. O. Kemmerich, Hamburg 1920.
4. Multi-Divi v. W. Wilkenson, Helsingborg 1917, letzte Auflage 1929.
5. Rechenresultate . . . v. F. Triebel, Berlin 1919.
6. Rechentafel v. C. A. Müller, Karlsruhe 1897.
7. Rechentafel v. Dr. H. Zimmermann, Berlin 1918.
8. Schnellrechner, Prag 1931.
9. Summablitz, Weltrechenbuch v. Dr. A. Söhner, Berlin seit 1920.

f) Zweimal-vierstellig:
1. Neue Rechentafeln v. Dr. J. Peters, Berlin 1909.
2. Rechentafeln v. Ludwig Zimmermann, 4. Aufl., Liebenwerda 1923.
3. Riems Rechentabellen mit Vorwort v. Dr. Kinkelin, 2. Aufl., München 1901.

g) Dreimal-zweistellig:
1. Hutig Regneren v. Math. Sorenson, Kobenhaven 1926.
2. Multiplikator Rechenfix v. C. Knoblauch, Dresden o. J.

h) Dreimal-dreistellig:
1. Dr. L. A. Crelles Rechentafeln, 1. Aufl. Berlin 1820. 2. Aufl. bes. v. Bremiker, Berlin 1859. Neue Aufl. bes. v. Seeliger, Berlin 1914.
2. Kühtmanns Rechentafel, Dresden o. J.

2. Unvollständige Tafeln.

a) Zweimal-zweistellig:
1. Produktentafel in Multiplex v. Fr. Schneider, München 1911.

b) Dreimal-dreistellig:
1. Rechentafel v. A. Henselin, 4. Aufl., Berlin 1923.
2. Große Multiplikationstabelle v. W. Kohlmann, Eilenburg o. J.

3. Auszugstafeln.

a) Zweimal-dreistellig:
1. Huru Myket v. Cl. Hakonson u. John Swartz, Kalmar 1910.
2. Interpolationstafel zur Berechnung der Proportionalteile v. Dr. Ludwig Schrön, 1. Aufl., Braunschweig 1859.
3. Räknemästaren v. A. L. Akerblom, Arvika 1909.
4. Liikemiehen Laskurirja v. Paavo Kopra, Vilipari 1924.

b) Zweimal-vierstellig:
1. Santz-Multiplikator v. Santz, Berlin 1920.
2. Universal-Kalkulator v. J. Bergmann, Berlin seit 1913.
3. Le Rapide v. Bourdon, Lüttich o. J.
4. Le Sifacile, Lüttich o. J. I. Teil.

c) Dreimal-dreistellig:
1. Abgekürzte Multiplikationstafel v. J. Ernst, Braunschweig 1901.
2. Universal-Rechner v. J. G. Lang, 19. Aufl., München o. J.

d) Dreimal-vierstellig:
1. Universal-Kalkulator v. J. Bergmann, Berlin o. J.
2. Le Sifacile, II. Teil, Lüttich o. J.
3. Vici, Lüttich o. J.

e) Viermal-dreistellig:
1. Moment-Rechentabellenwerk Ideal v. L. Grosse, Klinge bei Kottbus o. J.

4. Kombinierte Auszugstafeln.

a) Zweimal-zweistellig vollständig kombiniert mit zweimal-dreistelliger Auszugstafel:
1. Das Einmaleins von 1 bis 100 v. R. Eichold, 2. Aufl., Wien-Leipzig 1929.

b) Zweimal-dreistellig vollständig kombiniert mit dreimal-dreistelliger Auszugstafel:
1. Multipan v. Grosse, Klinge bei Kottbus 1930.

Leipzig. G. Beyrodt. 323

Räumliche Kurbelgetriebe. Durch Lynen[1]) ist der Aufbau ebener Mehrkurbelgetriebe bekannt geworden. Die Wahrscheinlichkeit sprach dafür, daß man auch räumliche Mehrkurbelgetriebe in ähnlicher Weise bilden könne. In der Doktorarbeit von Erich Engel[2]) wird nun gezeigt, daß man solche Getriebe tatsächlich nach einfachen Regeln aufbauen kann, und zwar sowohl im losen als auch im gebundenen Aufbau, mit Erweiterungen und Kürzungen und allen sonstigen bei ebenen Getrieben bekannten Veränderungen[1]).

Die Regel von Engel lautet für Getriebe in losem Aufbau:

Zahl der Achsen des Getriebes

$$e = b \cdot (K - 1) + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

Zahl der Glieder des Getriebes

$$n = b \cdot (K - 1) + 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

Zahl der Achsen des Kranzes

$$e_k = b + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

Zahl der Glieder des Kranzes

$$n_k = b + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Hierzu sind folgende Erläuterungen nötig:

K bedeutet die Zahl der Kurbeln[1]), im Dreikurbelgetriebe z. B. $K = 3$. Unter „Kranz" ist die den äußeren Umzug bildende geschlossene Gliederkette verstanden. b bedeutet den Bewegungsgrad[3]). Die allgemeinste räumliche Bewegung läßt sich nämlich durch 3 Drehungen um die 3 sich in einem Punkt schneidenden Achsen eines räum-

[1]) Hütte: 26. Auflage, Bd. I, S. 309 bis 311.
[2]) Erich Engel: Der Aufbau räumlicher Getriebe, die den ebenen Getrieben Lynens entsprechen. Diss. München 1932.
[3]) Rudolf Müller: Die Zwangläufigkeit kinematischer Ketten. Diss. Dresden 1919.

lichen Koordinatensystems und 3 Schiebungen gegen diese Achsen ersetzen; es bestehen also dann $b = 6$ Bewegungsmöglichkeiten, der Bewegungsgrad ist $b = 6$. Wird die Bewegungsmöglichkeit durch besondere Bedingungen eingeschränkt, so sinkt b. Für die allgemeine ebene Bewegung z. B. wird $b = 3$; die Gl. (1) mit (4) geben dann die bekannten Formen der ebenen Getriebe. Den Einfluß von b auf die Zahl der Glieder und Elementenpaare einer geschlossenen Kette hat Rudolf Müller untersucht. Je 2 Glieder sollen dabei in Elementenpaaren zusammenstoßen, die einen Freiheitsgrad haben. Die Achsen dieser Paare haben allgemeine, keine speziellen Lagen. Die Zahl der Achsen ist gleich der Zahl der Elementenpaare. Gibt man einem Elementenpaar mehrere Freiheitsgrade, so vermindert sich die Zahl der Glieder: ein Kugelgelenk z. B. mit 3 $(= 1 + 2)$ Freiheitsgraden bedingt eine Verminderung um 2 Glieder. Schon Grübler hat auf die Vereinfachung der Getriebe aufmerksam gemacht die hierdurch erzielt wird[4]).

Nach Engel erhält demnach ein räumliches Dreikurbelgetriebe in losem Aufbau die Gestalt nach Abb. 1, wenn man die schematische Form des ebenen Dreikurbelgetriebes beibehält.

Es wird:

$$e = 6(3-1) + 3 = 15$$

$$n = 6(3-1) + 2 = 14$$

$$n_k = e_k = 6 + 3 = 9\,.$$

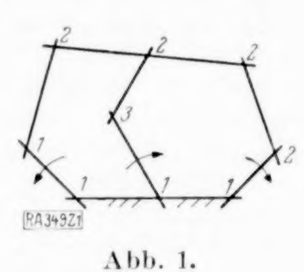


Abb. 1.

Da die 3 Kurbeln gleichberechtigt sind, lassen sich 3 Kränze angeben. Sie haben nach Engel 9, 10 und 11 Glieder und Achsen. Die Vermutung liegt nahe, daß es möglich ist, jedem Kranz 10 Glieder und Achsen zuzuweisen, oder allgemein:

$$n_k = e_k = 2K + 4\,.$$

So entsteht Abb. 2:

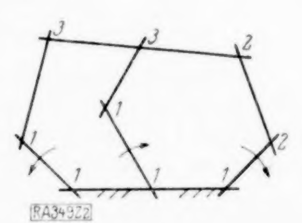


Abb. 2.

Die Zwangläufigkeit des Getriebes nach Abb. 1 hat Engel nachgewiesen; soll auch das Getriebe nach Abb. 2 zwangläufig sein, so muß der nach Stillsetzung der drei Kurbeln verbleibende Rest (Abb. 3) unbeweglich sein.

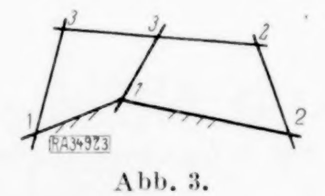


Abb. 3.

Nach Rudolf Müller kann dies mit Hilfe der von Grübler eingeführten „unabhängigen geschlossenen Gliedergruppen" nachgeprüft werden. Der Getrieberest enthält unter 3 möglichen I, II und III je 2 unabhängige Gliedergruppen I und II, I und III, II und III (Abb. 4); allgemein erhält man unter $(2K-3)$ möglichen je $(K-1)$ unabhängige Gliedergruppen.

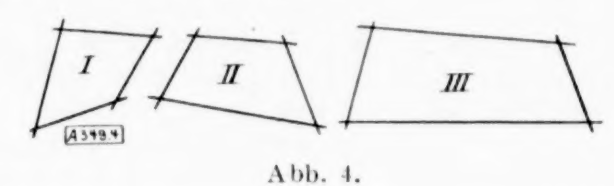


Abb. 4.

Nach Rudolf Müller ist die Anzahl der Achsen s oder der Elementenpaare e einer zwangläufig beweglichen Kette

$$e = \Sigma(i \cdot g_i) - m + 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und die Zahl ihrer Glieder

$$n = \Sigma[(i-1) \cdot g_i] - m + 2 \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Darin bedeutet g_i die Zahl der unabhängigen geschlossenen Gliedergruppen mit dem Bewegungsgrad $b = i$; m ist die Zahl der Bewegungsmöglichkeiten, um die b durch Wegnahme der je 2 Gliedergruppen gemeinsamen Elementenpaare in beiden Gruppen vermindert wird. Hier ist $b = i = 6$, $g_6 = 2$, $m = 0$.

Also wird:

$$e = 6 \cdot 2 - 0 + 1 = 13\,,$$

$$n = 5 \cdot 2 - 0 + 2 = 12\,.$$

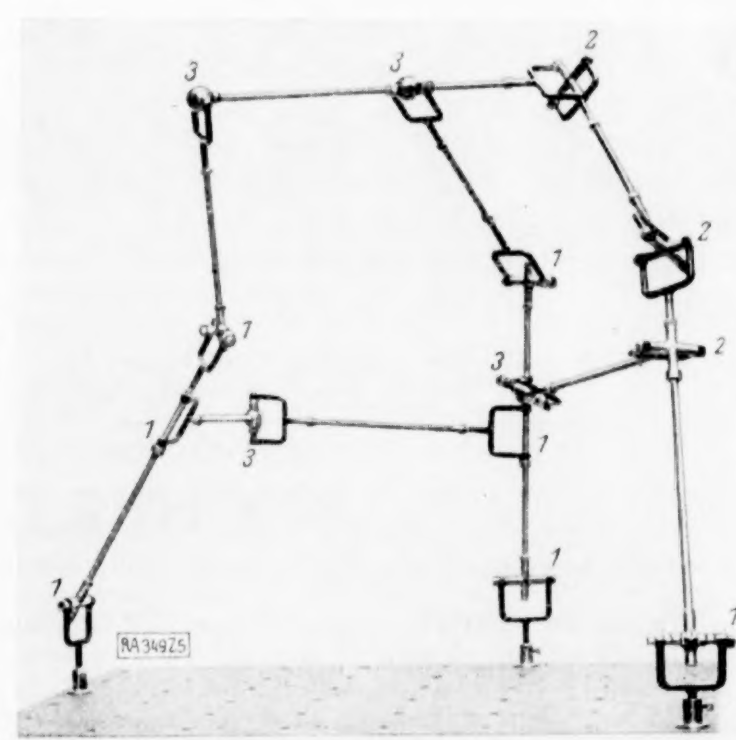
In Abb. 3 ist jedoch

$$e = 12\,, \qquad n = 11\,;$$

es ist daher ein Elementenpaar und ein Glied zu wenig vorhanden, so daß die für die zwangläufige Beweglichkeit nötige Zahl nicht erreicht wird und das Gebilde starr ist.

Abb. 5 stellt das Lichtbild eines nach Abb. 2 aufgebauten Modells eines Dreikurbelgetriebes dar, aber in gebundenem Aufbau. Es sind also zwischen je 2 Kurbeln Fesseln angebracht[1]).

Man kann auch sagen, daß nun der Steg, 2 Kurbeln und ihre Fessel zusammen ein Einkurbelgetriebe bilden, dessen Achszahl und Gliederzahl



Modell- u. Plansammlung für Maschinenbaukunde d. Techn. Hochschule München 26. 11. 1932

Räumliches Dreikurbelgetriebe in gebundenem Aufbau. Die Ziffern an den Gelenken geben die Zahl der Achsen an.

Abb. 5.

[4]) Grübler: Das Kriterium der Zwangläufigkeit der Schraubenketten, Otto Mohr zum 80. Geburtstag, S. 124 u. f. — Alt: Die praktische Bedeutung der Raumgetriebe. ZdVDI 1929, S. 188 u. f.

wie bekannt $= 7$ ist; dies stimmt auch mit dem Engelschen Ansatz für den Kranz mit

$$e_k = n_k = b + K = 6 + 1 = 7 .$$

Wie in der ebenen Getriebelehre folgt das Einkurbelgetriebe den Gleichungen für die Mehrkurbelgetriebe nicht; sie gelten erst vom Zweikurbelgetriebe aufwärts; auch das räumliche Einkurbelgetriebe erscheint als gekürztes Zweikurbelgetriebe.

Die Maßnahmen der Erweiterung, Streckung, Kürzung[1]) lassen sich an dem Bild ebenfalls verfolgen.

Die 3. Kurbel mit ihrer Fessel kann beispielsweise als Streckung des genannten Einkurbelgetriebes aufgefaßt werden; es zeigt sich, daß 6 Elementenpaare (allgemein $e - K$, hier $7 - 1$) und 5 Glieder (allgemein $n - K - 1$, hier $7 - 1 - 1$) hinzugekommen sind. Den vorhin behandelten Rest des Dreikurbelgetriebes (Abb. 3) kann man auch als Erweiterung allgemeiner Art über dem einmal gestreckten Einkurbelgetriebe deuten, so daß zu diesem durch die Erweiterung $e - K = 15 - 3 = 12$ Elementenpaare und $n - K - 1 = 14 - 3 - 1 = 10$ Glieder hinzukommen, wie aus Abb. 5 abzulesen ist.

Es soll nun noch der Fall behandelt werden, daß das Getriebe teilweise eine allgemeine räumliche ($b_1 = 6$) und teilweise eine allgemeine ebene ($b_2 = 3$) Bewegung ausführt (Abb. 6):

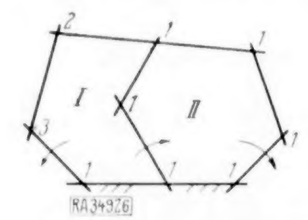


Abb. 6.

Gruppe I hat eine allgemeine räumliche, Gruppe II eine allgemeine ebene Bewegung. Sämtliche Achsen in II sind einander parallel und stehen senkrecht auf der Zeichenebene; die Elementenpaare in II werden somit zu Drehpaaren.

Nach Engel wird die Zahl der Elementenpaare

$$e = (K - 1 - E) \cdot b_1 + E \cdot b_2 + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und die Zahl der Glieder

$$n = b_1 + K + (K - E - 2)\,(b_1 - 1) + E\,(b_2 - 1) \quad (8);$$

hierin bedeutet E die Zahl der unabhängigen Gliedergruppen, in denen eine andere Bewegung stattfindet als im Kranz. Hier ist $E = 1$; damit wird

$$e = (3 - 1 - 1) \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 3 = 12$$

und

$$n = 6 + 3 + (3 - 1 - 2)\,(6 - 1) + 1\,(3 - 1) = 11 ,$$

wie Abb. 6 zeigt.

Die Nachprüfung nach Rudolf Müller ergibt: für $i = b_1 = 6$ ist $g_6 = 1$ und für $i = b_2 = 3$ ist $g_3 = 1$; m ist $= 0$, da durch Wegnahme der den beiden Gruppen gemeinsamen Elementenpaare weder der Bewegungsgrad $b_1 = 6$ in I noch $b_2 = 3$ in II vermindert wird; daraus folgt:

$$e = \Sigma\,(i \cdot g_i) - m + 1 = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 0 + 1 = 10$$

und

$$n = \Sigma\,[(i - 1) \cdot g_i] - m + 2 = 5 + 2 - 0 + 2 = 9 .$$

Übereinstimmung ist vorhanden, wenn man bedenkt, daß nach dem auf eine Kurbel beschränkten Begriff des Zwanglaufs wie ihn Müller beibehalten hat, 2 Kurbeln stillgesetzt, gekürzt, werden müssen. Dann sinken die nach Engel berechneten Werte von e und n je um 2, e wird $= 10$, $n = 9$, wie es sich nach Müller ergibt.

Sind besondere Bedingungen vorgeschrieben, die die Lagen der Achsen und damit den Bewegungsgrad b beeinflussen, so müssen die angegebenen Gleichungen sinngemäß angewendet werden. Die Arbeit von Müller behandelt einige Beispiele dieser Art.

Baut man Getriebe nach den Regeln von Engel im Modell auf, so macht man folgende Beobachtungen: Es ist vorteilhaft, mit möglichst wenig Gliedern zu arbeiten, so daß die Elementenpaare möglichst viele Freiheitsgrade in sich vereinigen. Dann vermeidet man am sichersten das Auftreten von Sonderlagen, die mit einem Absinken des Bewegungsgrades b verbunden sind; das Getriebe würde in solchen Fällen aufhören zwangläufig zu sein. Auch abgesehen davon scheinen die Bahnen manchmal Besonderheiten aufzuweisen; zuweilen ist die Bewegung nicht umkehrbar oder es werden bei Wiederholung der gleichen Bewegungsrichtung andere Bahnen durchlaufen; der Grund kann sein, daß Verzweigungen der Bahnen auftreten, ähnlich den Bahnen I und II in Abb. 7:



Abb. 7.

Mit den Gl. (1) mit (4) ist der erste Schritt getan zum planmäßigen Aufbau räumlicher Mehrkurbelgetriebe. Die nächsten Aufgaben sind: Aufzeichnung aufeinanderfolgender Stellungen des Getriebes und Ermittlung der Bahnen von Punkten seiner Glieder; Aufzeichnung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser Punkte. Während für die zweite Aufgabe Lösungen bereits vorhanden sind oder in naher Aussicht stehen, werden bei der ersten noch verschiedene Schwierigkeiten zu überwinden sein.

München, 15. 3. 33. G. Marx. 349

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr. JOSEF **LENSE**, o. ö. Prof. d. Techn. Hochschule München, Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. 178 S. m. 30. Abb. Berlin u. Leipzig 1933, Verlag von Walter de Gruyter & Co. Preis 9,50 M.

Das Buch kommt einem Bedürfnis entgegen, das sicherlich bei Mathematikern, namentlich auch solchen, die die Anwendungen pflegen, fühlbar war. Es enthält eine kurze Zusammenfassung der sonst zerstreuten Literatur über Besselsche Funktionen, Kugelfunktionen, Γ-Funktion und asymptotische Reihenentwicklungen. Diese Gegenstände werden in den größeren Lehrbüchern der mathematischen Physik zu kurz behandelt; die Spezialwerke über einzelne Funktionen sind andererseits zu umfangreich und für den Benutzer zu schwerfällig. Die Auswahl des Stoffes bei Lense ist im allgemeinen zu loben. Gelegentlich würde man etwas näheres Eingehen auf Anwendungen und Durchführung der Rechnungen wünschen.

LEON **LICHTENSTEIN,** o. ö. Prof. d. Math. a. d. Univ. Leipzig. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. VII + 174 S. m. 4 Abb. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geh. 15,60 M.

Ein klassisches Problem der Hydromechanik, das für die Kosmogonie von Bedeutung ist, wird hier mit den modernsten Methoden der Analysis behandelt. Der kürzlich verstorbene Verfasser gibt damit eine Zusammenfassung und Ergänzung eigener früher veröffentlichter Untersuchungen. Wenn auch die physikalische Fragestellung heute nicht aktuell ist, wird diese mathematische Forschungsarbeit vielleicht einmal von ganz anderem Standpunkt aus wichtig sein; die Geschichte der mathematisch-physikalischen Theorien kennt mannigfache Beispiele derartig wechselvoller „Schicksale".

GERHARD **KOWALEWSKI,** o. ö. Prof. der reinen Mathematik a. d. Techn. Hochschule Dresden. Integrationsmethoden der Lieschen Theorie (Bd. 15 d. Samml. „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern" herausg. v. E. Artin und G. Kowalewski). VIII + 221 S. Leipzig 1933, Akadem. Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis geb. 18 M.

Ein neues Buch des bekannten Lehrbuchautors, dieses einmal ein exklusives, für die Theoretiker der Mathematik bestimmtes Buch. Die Lieschen Integrationsmethoden haben sich bisher wenig für die praktische Durchführung von Integrationsaufgaben bewährt. Das theoretische Interesse ist jedoch in mehrfacher Hinsicht begründet.

G. **TEMPLE,** Ph. D., D. Sc., Prof. of Mathematics in the University of London, King's College, and W. G. **BICKLEY,** D. Sc., Assistant Prof. of Mathematics in the University of London. Rayleigh's Principle and its Applications to Engineering. The Theory and Practice of the Energy Method for the Approximate Determination of Critical Loads and Speeds. IX + 156 S. m. 22 Fig. im Text. Oxford University Press. London: Humphrey Milford. 1933. Preis 14 sh.

Unter Rayleighschem Prinzip verstehen die Verfasser den Satz, nach dem die Grundfrequenz eines schwingenden Systems sich aus der Bedingung bestimmt, daß für sie die Summe der zeitlichen Mittelwerte aus kinetischer und potentieller Energie des Systems ein absolutes Minimum bildet. Mit diesem Satz wird eigentlich erst eine Aufgabe der Variationsrechnung gestellt, die im allgemeinen schwierig zu lösen ist. Eine rasche Berechnung der gesuchten Frequenz ist auf dieser Grundlage nur dann möglich, wenn man die Schwingungsform des Systems schon kennt oder für sie eine brauchbare Näherungsannahme machen kann. Mit solchen Methoden, die also von einem mehr oder weniger willkürlichen Ansatz für die Schwingungsform ausgehen, beschäftigt sich das vorliegende Buch. Es ist klar und einfach geschrieben, gut verständlich für jeden Ingenieur, der mit den Anfangsgründen der höheren Mathematik vertraut ist. v. Mises. 409

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. Prof. an der Univ. Berlin, Mitglied d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften, Differentialgeometrie. (Teubners math. Leitf. Bd. 31.) VI + 142 S. m. 8 Fig. i. Text. Leipzig und Berlin 1932, B. G. Teubner Verlag. Preis kart. 6 M.

Der Verfasser läßt seinen bekannten Leitfäden diesen sechsten folgen, so daß mit dem neuerdings erschienenen siebenten eine kleine Bibliothek für den Studierenden der Mathematik aus des Verfassers Hand da ist, die ausreicht, die wichtigsten Grundlehren der Analysis und der Geometrie zu lernen. Dieser Leitfaden bringt insbesondere in drei sehr ungleich langen Kapiteln die Theorie der Kurven in der euklidischen Ebene, der Kurven im euklidischen Raum und der Flächen im euklidischen Raum. Das Zwei- und Dreidimensionale ist also betont hervorgehoben, doch geschieht die Darstellung stets im Hinblick auf Verallgemeinerungsmöglichkeit. In der Flächentheorie werden sowohl die wichtigen Linien auf der Fläche, wie die wichtigen Flächenarten gebührend besprochen. Es sei hervorgehoben, daß man sowohl Levi-Civitàs Parallelverschiebung, wie auch die Elemente der Tensorrechnung, Krümmungstensor im Riemannschen Raum sowie die kovariante Differentiation findet, so daß das Buch als Vorbereitung für den Physiker zum Studium der Relativitätstheorie geeignet ist. Vektorrechnung wird durchgängig verwendet. „Ich hoffe weiter, daß man in meinem Buche keine saloppen Gedankengänge finden wird, keine unsauberen Schlüsse von der Art, wie sie auch die moderne Literatur über Differentialgeometrie leider so oft noch beherbergt — als Überreste aus der Plüschmöbelzeit und als Verstandesschoner." Als bezeichnend für die Absichten des Verfassers kann vielleicht die axiomatische Einführung der Formel für den Flächeninhalt auf Seite 50 genannt werden, wo die Formel hingeschrieben wird und dann gezeigt, daß sie die einzige ist, die vier vernünftigerweise an den Begriff zu stellende Forderungen erfüllt. Ob aber der Anfänger nicht doch mit einigem Recht fragt, wie man auf die Formel kommt? Verfasser könnte vielleicht hierauf in einer neuen Auflage Antwort geben, ohne in die Plüschmöbelzeit zurückzusinken.

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. Prof. an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin, Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Einleitung in die höhere Geometrie. (Teubners math. Leitfäden, Bd. 39.) VIII + 128 S. mit 25 Fig. Leipzig und Berlin 1933, Verlag von B. G. Teubner. Preis kart. 6,40 M.

Dieser siebente Leitfaden des Verfassers führt in die Höhere Geometrie ein, worunter Fragen der Axiomatik, das Hessesche Übertragungsprinzip (Übertragung bekannter Sätze eines Gegenstandes auf einen anderen, axiomatisch isomorphen), Liniengeometrie, Möbiussche, Liesche und Laguerresche Kreisgeometrie, Kugelgeometrie und projektive Maßstimmung verstanden werden. Dies entspricht der Absicht des Verfassers, den Leitfäden der analytischen und der projektiven Geometrie einen gewissen Abschluß zu geben. Kleins Erlanger Programm, der Begriff der Dualität, die projektive Auffasung stehen im Vordergrund. Der Inhalt des Leitfadens liegt vielleicht dem angewandten Mathematiker etwas ferner — man kann aber nie wissen —, um so näher dem Schulmann, der sein eigenes Wissen und das einer intelligenten Prima zu bereichern wünscht.

Berlin. G. Hamel. 419

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

H. v. **MANGOLDT'S** Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbststudium. Vollständig neu bearbeitet und erweitert von Konrad KNOPP, ord. Prof. der Mathematik a. d. Univ. Tübingen. Dritter Band. Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. 6. Aufl. XVI + 618 S. m. 103 Fig. im Text. Leipzig 1933, Verlag von S. Hirzel. Preis geh. 15 M., geb. 16,80 M.

Technisch-wissenschaftliche Abhandlungen aus dem Osram-Konzern. 3. Band. VII + 144 S. m. 138 Abb. Berlin 1934, Verlag von Julius Springer.

Prof. Dr. A. **WITTING,** Oberstudienrat i. R. in Dresden, Integralrechnung. 175 S. m. 63 Abb. u. 190 Beispielen. Sammlung Göschen, 88. Bd. Berlin und Leipzig 1933, Walter de Gruyter & Co. Preis 1,62 M.

K. **HOHENEMSER,** Dr.-Ing., Göttingen, und W. **PRAGER,** Prof. Dr.-Ing., Göttingen, Dynamik der Stabwerke. Eine Schwingungslehre für Bauingenieure. VI + 367 S. m. 139 Textabb. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis geh. 32,50 M., geb. 34 M.

Dr. KARL K. **DARROW,** Mitglied des Techn. Stabes der Bell Telephone Lab. New York, Elementare Einführung in die Quantenmechanik. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. E. RABINOWITSCH. 123 S. m. 5 Abb. Leipzig 1933, Verlag von S. Hirzel. Preis kart. 6 M.

Dr. W. **BAUMANN** und Dr. **R. MECKE,** a. o. Prof. a. d. Un. Heidelberg, Das ultrarote Sonnenspektrum von λ 10000 bis λ 7600 A. E. Leipzig 1934, Johann Ambrosius Barth. 56 S. m. 6 Taf. Preis 12 M.

Dr. LOTHAR **KOSCHMIEDER,** o. Prof. a. d. Deutsch. Techn. Hochschule in Brünn, Variationsrechnung. Sammlg. Göschen Bd. 1074. 128 S. m. 21 Fig. Berlin und Leipzig 1933, Walter de Gruyter & Co. Preis 1,62 M.

Drei Klassiker der Strömungslehre: Hagen, Poiseuille, Hagenbach. Hrsg. v. Prof. Dr. L. SCHILLER. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 237.) Leipzig 1933, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H. 97 S. m. 4 Textfig. Preis kart. 5,60 M.

Dr. W. **LIETZMANN,** Oberstudiendirektor in Göttingen, und Dr. **J. JAROSCH,** Direktor der Bundesrealschule in Wien XIII, Arithmetik für die I. u. II. Klasse. 5. Aufl. 139 S. m. 21 Fig. Wien 1934, Franz Deuticke Verlag. Preis 3,20 M.

Dr. W. **LIETZMANN** Oberstudiendirektor in Göttigen, und Dr. **J. JAROSCH,** Direktor der Bundesrealschule in Wien XIII, Geometrie für die I. u. II. Klasse. 4. Aufl. 108 S. m. 152 Fig. Wien 1934, Franz Deuticke Verlag. Preis 2,80 M.

Dr. EUGEN **JAHNKE,** weil. Prof. a. d. Bergakademie in Berlin, und Dr. Dr. FRITZ **EMDE,** Prof. d. Elektrotechnik a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Funtionentafeln mit Formeln und Kurven. 2., neubearb. Aufl. (7. Tausend.) XVIII + 330 S. m. 171 Textfig. Leipzig und Berlin 1933, Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 16 M.

Dr.-Ing. ADOLF **BUSEMANN,** Priv.-Dozt. für Strömungslehre und Thermodynamik a. d. Sächs. Hochsch. Dresden, Der Wärme- und Stoffaustausch, dargestellt im Mollierschen Zustandsdiagramm für Zweistoffgemische. VI + 75 S. m. 51 Textabb. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer. Preis kart. 6 M.

Dr.-Ing. HUGO **RICHTER,** VDI, Priv.-Dozt. a. d. Bergakademie Freiberg, Rohrhydraulik. Allgemeine Grundlagen, Forschung, Praktische Berechnung und Ausführung von Rohrleitungen. IX + 256 S. m. 192 Textabb. u. 44 Zahlentaf. Berlin 1934, Verlag von Julius Springer. Preis geb. 22,50 M.

G. E. **BEGGS,** R. E. **DAVIS** and H. E. **DAVIS,** Tests on Structural Models of Proposed San Francisco-Oakland Suspension Bridge. 166 S. m. 56 Fig. im Text. Berkeley, California, 1933, University of California Press. 1,50 $.

Reuleaux-Mitteilungen. Archiv für Getriebetechnik. Schriftleitung Dr. phil. R. BEYER, Zwickau i. Sa. Herausgeber: Reuleaux-Ges. E. V., Wiss. Ges. z. Förderung der Getriebetechnik, Berlin NW 7, Luisenstr. 58. Erscheinungsweise monatlich. Einzelheft 1,25 M, 6 Lieferungen je 1 M.

Vorträge gehalten auf dem 9. Deutschen Physiker- und Mathematikertag in Würzburg 1933. Zusammengestellt von W. HORT und F. MOENCH. 90 S. m. 179 Abb. im Text u. auf 5 Taf. sowie 1 Taf. m. 12 Filmstreifen. Leipzig 1933, J. A. Barth. Preis brosch. 6 M.

P. **DEBYE,** o. Prof. u. Direktor d. Physikalischen Instituts a. d. Univ. Leipzig, Struktur der Materie. Vier Vorträge. 50 S. m. 21 Abb. Leipzig 1933, Verlag von S. Hirzel. Preis kart. 3 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

In einer Sitzung am 16. Februar 1934 teilte Hr. Dr.-Ing. Fromm, der die Ortsgruppe zwecks Neuwahl ihres Vorsitzenden im Auftrage des Hauptvorstandes eingeladen hatte, den Rücktritt von Hrn. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. H. Reissner mit und bezeichnete es als eine erste Pflicht der Versammlung, diesem ihrem langjährigen Vorsitzenden auf das wärmste zu danken und ihm diesen Dank zum Ausdruck zu bringen. Die Versammlung stimmte lebhaft bei. — Der Vorschlag, Hrn. Prof. Dr. G. Hamel zum Vorsitzenden zu wählen, wurde mit lebhafter Zustimmung einstimmig angenommen. Hr. Prof. Hamel nahm die Wahl an und beauftragte mit der Geschäftsführung der Ortsgruppe Hrn. Priv.-Dozt. Dr.-Ing. H. Fromm, T. H. Berlin, Charlottenburg 2, Berliner Straße 171/2.

Im Anschluß an den geschäftlichen Teil der Sitzung fand ein Vortrag von Hrn. Dr.-Ing. Dipl.-Ing. L. Cremer, Berlin, über „Biegungsschwingungen von Stäben mit innerer und äußerer Dämpfung und ihre Darstellung durch ein Achtpolschema" statt. Der Vortrag ist unter dem Titel „Vierpoldarstellung und Resonanzkurven bei schwingenden Stäben" in den Sitz.-Ber. d. pr. Akad. 1934, I (math.-phys. Kl.) veröffentlicht.

Persönliches.

Hr. Prof. Dr. Theodor Vahlen, früher in Greifswald, hat einen Ruf auf den Lehrstuhl der angewandten Mathematik und als Direktor des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Berlin als Nachfolger von Prof. Dr. v. Mises angenommen.

Hr. Geh. Hofrat Prof. Dr. J. Horn, Ordinarius für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt, ist mit Wirkung vom 1. April 1934 in den Ruhestand versetzt worden.

Die Herren Mitarbeiter werden gebeten, ihre Manuskripte an den neuen Herausgeber, Prof. Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1, zu senden.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. IV. Vj. D.A. 1100.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.